

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
CENTRO DE ENSINO A DISTÂNCIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**RECURSOS GEOMÉTRICOS NA
RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DESAFIADORAS
DE FÍSICA DO ENSINO MÉDIO**

FABIO MIRANDA RODRIGUES

MONOGRAFIA DE CONCLUSÃO DO CURSO DE FÍSICA A DISTÂNCIA

Orientador(a): José Roberto Tagliati

Juiz de Fora, 22 de março de 2017.

FABIO MIRANDA RODRIGUES

**RECURSOS GEOMÉTRICOS NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES
DESAFIADORAS DE FÍSICA DO ENSINO MÉDIO**

Trabalho de conclusão de curso apresentado como parte das atividades para obtenção do título de Licenciado em Física, do curso de Licenciatura em Física a Distância da Universidade Federal de Juiz de Fora.

Prof. orientador: José Roberto Tagliati

Juiz de Fora, 2017

Autor: Fabio Miranda Rodrigues

Título: Recursos Geométricos na Resolução de Questões Desafiadoras de Física do Ensino Médio

Trabalho de conclusão de curso apresentado como parte das atividades para obtenção do título de Licenciado em Física, do curso de Licenciatura em Física a Distância da Universidade Federal de Juiz de Fora.

Os componentes da banca de avaliação, abaixo listados, consideram este trabalho aprovado com nota ...				
	Nome	Titulação	Assinatura	Instituição
1				
2				
3				

Data da aprovação: ____ de _____ de _____.

Dedico este trabalho à minha família.

Agradecimentos

*Agradeço à minha família, aos meus amigos,
aos professores que tive, aos autores dos livros
que li. O resto, foi consequência disso tudo.*

*A Geometria existe, como já disse o filósofo,
por toda a parte.
É preciso, porém, olhos para vê-la,
inteligência para compreendê-la,
e alma para admirá-la.*

*Beremiz Samir em “O Homem que Calculava” -
Malba Tahan*

Resumo

Este trabalho tem, por objetivo, a exploração de algumas ferramentas geométricas que são capazes de se resolver, com simplicidade, problemas desafiadores de Física, a nível de Ensino Médio.

Muitas questões que são definidas como “difíceis” pelos alunos são difíceis na parte algébrica, mas simples quando são resolvidos geometricamente. Tais questões costumam aparecer em olimpíadas de física, como OBF e IPhO, e em vestibulares de alto nível em ciências exatas no Brasil.

As ferramentas mostradas neste trabalho já foram utilizadas por vários anos pelo autor deste trabalho, mostrando-se eficazes e mais interessantes para os alunos do que soluções simplesmente algébricas.

Algumas das questões de exemplo deste texto foram aplicadas em caráter experimental a alunos de níveis e idades variados, antes e depois da explicação de alguns conceitos geométricos. Resultados interessantes estão presentes neste trabalho em capítulo próprio.

Pretendemos, com isto, o valor dessas ferramentas geométricas na Física do Ensino Médio.

Palavras-chave: física, ensino médio, geometria, olimpíadas.

Abstract

This monograph aims to explore some geometrical tools that are capable of solving, with great simplicity, challenging problems in school physics.

Many problems that students use to point as “hard”, are hard only when they try to solve it via algebraic tools, but could be easily solved using basic geometry. These problems usually appear in physics olympiads, like IPhO, and in some of the hardest college admission papers.

The tools showed in this monograph have already been used for years, with success, by the author. These tools have been proved out to be very interesting in solving hard physics problems for school students.

Some of the problems described as example in this text were given as tasks to students, with different ages and of different levels, before and after the explanation of some of the geometrical concepts. Interesting results are presented in this monograph.

Hence, it is intended to show the value of these geometric tools in the solution of challenging physics problems in High School.

Keywords: physics, high school, geometry, olympiads.

Sumário

1 Introdução.....	10
2 Recursos da Geometria Plana.....	12
2.1 <i>Introdução.....</i>	12
2.2 <i>Soluções gráficas em geral.....</i>	12
2.3 <i>Tangentes e retas tangentes.....</i>	14
2.3.1 Conceitos matemáticos.....	14
2.3.2 Aplicações na Física.....	16
2.3.3 Exemplo de questão.....	18
2.4 <i>Áreas.....</i>	20
2.4.1 Conceitos matemáticos.....	20
2.4.2 Aplicações na Física.....	24
2.4.3 Exemplo de questão.....	26
2.5 <i>Figuras Semelhantes e Razão de Semelhança.....</i>	27
2.5.1 Conceitos matemáticos.....	27
2.5.2 Aplicações na Física.....	29
2.5.3 Exemplos de questões.....	30
2.6 <i>Outras questões interessantes.....</i>	32
3 Recursos da Geometria Analítica.....	40
3.1 <i>Introdução.....</i>	40
3.2 <i>Algoritmo de Gauss para cálculo de áreas.....</i>	40
3.2.1 Conceitos matemáticos.....	40
3.2.2 Aplicações na Física.....	43
3.2.3 Exemplo de questão.....	43
3.3 <i>Condição de alinhamento de pontos.....</i>	45
3.3.1 Conceitos matemáticos.....	45
3.3.2 Aplicações na Física.....	46
3.3.3 Exemplos de questões.....	46
3.4 <i>Análise cilíndrica.....</i>	50
3.4.1 Análise voltada às aplicações na Física.....	50
3.4.2 Exemplos de questões.....	51
4 Outros problemas.....	59
4.1 <i>Introdução.....</i>	59
4.2 <i>Problemas.....</i>	59
5 Relatório de aplicações durante o Estágio Supervisionado.....	67
5.1 <i>Introdução e comentários gerais.....</i>	67
5.2 <i>Aplicação da Questão 3 em turma regular do 1º ano do Ensino Médio.....</i>	68

5.2.1 Situação.....	68
5.2.2 Antes de explicar algumas ferramentas geométricas.....	68
5.2.3 Após explicar algumas ferramentas geométricas.....	71
5.2.4 Após a explicação da questão no quadro, tanto da forma algébrica quanto da forma geométrica.....	73
5.3 Aplicação da Questão 8 em turma preparatória para concursos militares.....	73
5.3.1 Situação.....	73
5.3.2 Antes de incentivar o uso de ferramentas geométricas.....	74
5.3.3 Após incentivar o uso de ferramentas geométricas.....	80
5.4 Aplicação da Questão 7 em turma preparatória para concursos militares.....	81
5.4.1 Situação e análise.....	81
5.5 Comentários gerais sobre as inserções durante o Estágio.....	82
6 Considerações finais.....	84

1 Introdução

Esta pesquisa pretende mostrar que vários problemas de física que são considerados como “difíceis” ou “desafiadores” pelos alunos de Física do Ensino Médio podem ser resolvidos bem mais facilmente através do uso de recursos geométricos, ao invés do uso puro de recursos algébricos.

Os problemas mais desafiadores de Física do Ensino Médio encontrados por estudantes brasileiros costumam ser aqueles que figuram em olimpíadas intelectuais (como a OBF, a OIBF e a IPhO) e em alguns vestibulares que exigem um alto nível de conhecimento de ciências exatas (como ITA e IME). Várias questões destes concursos apresentam grau de dificuldade elevado, sobretudo se o aluno não conhecer algumas ferramentas mais eficazes de solução.

O autor do presente trabalho conta com uma experiência de anos trabalhando com alunos que se preparavam para essas provas, tendo portanto tido contato com algumas técnicas de resolução de problemas que se mostraram não apenas eficazes, mas de assimilação muito simples pelos alunos. Várias foram as ocasiões em que a falta do uso de recursos geométricos na resolução de problemas desafiadores deixou os alunos sem conseguirem prosseguir no problema – mas o uso dessas mesmas ferramentas fizeram com que os alunos pudessem resolvê-los de forma simples, elegante e de forma a entender plenamente o problema.

A ideia deste trabalho surgiu logo quando o autor percebeu esta lacuna existente na formação de adolescentes e jovens que desejam se aprofundar na resolução de questões mais complexas de Física do Ensino Médio, que exigem criatividade e ousadia por parte dos alunos. As ferramentas geométricas consistiriam num ponto de partida para que tais alunos pudessem, a partir de sua compreensão, conseguir aplicar esses e outros conceitos em questões de física que são verdadeiros desafios.

Algumas ferramentas principais serão desenvolvidas no presente trabalho, além de vários exemplos de questões desafiadoras e suas respectivas soluções por meio geométrico, no intuito de mostrar o quão poderosas podem ser tais ferramentas na Física do Ensino Médio. Como este trabalho é voltado para a licenciatura, as resoluções serão feitas em linguagem próxima da que se pode usar em sala de aula, de claro entendimento para um aluno de Ensino Médio, e de forma a se aproximar dele.

Algumas das questões resolvidas nesta monografia foram propostas a alunos do Ensino Médio, durante as atividades de Estágio. A comparação entre as soluções algébricas e geométricas, as formas como os alunos resolveram as questões sem e com o incentivo de utiliza-

rem tais ferramentas e alguns casos interessantes observados em sala de aula durante o Estágio estão contidos nesta monografia, em capítulo próprio.

Muito além de preparar um aluno para uma prova qualquer, a resolução de questões desafiadoras permite o engrandecimento do aluno de várias maneiras, ao estimular sua criatividade e a sua segurança no entendimento e resolução de problemas. Quando um problema difícil é elegantemente resolvido, o aluno sente-se muito mais confiante, tendo tido um salto de aprendizado bem interessante.

Pretende-se, portanto, explorar algumas ferramentas geométricas e sua eficácia em problemas desafiadores de Física.

2 Recursos da Geometria Plana

Toda minha Física vem da Geometria.

René Descartes

2.1 Introdução

A Geometria Plana desempenha fundamental importância na vida do ser humano, por ser a mais fundamental e intuitiva das geometrias. Seus axiomas são, em geral, bem absorvíveis, fazendo com o que seu uso como recurso na resolução de questões de Física seja interpretada pelo aluno, em geral, como sendo mais fácil do que soluções puramente algébricas.

No geral, os recursos da Geometria Plana podem ser aplicados com maior facilidade a questões de física que possam ser desenvolvidas em forma de gráficos, muito embora a criatividade e inventividade humanas façam com que não haja limites bem definidos acerca das possibilidades de uso de geometria na resolução de problemas.

Nesta seção, pretende-se apresentar algumas ferramentas geométricas que costumam ser eficazes na resolução de problemas de Física, bem como alguns problemas desafiadores que podem ser resolvidos com concisão e elegância através do uso dessas ferramentas.

2.2 Soluções gráficas em geral

O uso de gráficos, aliados a recursos geométricos gerais, é uma ferramenta extremamente poderosa na resolução de questões desafiadoras de Física. Um problema numérico, quando traduzido em forma gráfica, faz com que relações entre variáveis apareçam em forma de pares ordenados; e a reunião desses pares ordenados forma uma figura qualquer, que pode ser analisada pelo estudante.

A **Questão 1** a seguir é bem desafiadora quando formulada fora do contexto das soluções gráficas:

Questão 1 - ZEITZ (2007): Um monge sobe uma montanha, em peregrinação. Ele começa sua caminhada por uma trilha na base da montanha às 6:00 da manhã, e atinge seu topo às 6:00 da noite, por lá passando o resto do dia e a noite.

No dia seguinte, ele inicia a descida da montanha, exatamente às 6:00 da manhã, passando pela exata mesma trilha que fizera na subida, chegando finalmente à base às 6:00 da noite.

Prove que há pelo menos um ponto da trilha pelo qual o monge passou na exata mesma hora do dia, tanto na subida quanto na descida.

O primeiro fato que causa surpresa na **Questão 1** é a sua “abertura”, ou seja, a escassez de dados numéricos ou demais condições. Não há especificação da velocidade do monge – ele poderia estar correndo, poderia estar andando, poderia se deslocar um pouco, parar e depois continuar, poderia manter sua velocidade constante ou variar continuamente, poderia voltar atrás e depois continuar. Além disso, não é especificado se a forma como sua velocidade se comporta na subida corresponde com seu comportamento na descida. Isso tudo contribui para que o problema fique aparentemente sem uma solução fácil. Classicamente, o aluno do Ensino Médio pega um problema de cinemática e aplica uma equação, que varia de acordo com o caso em questão: movimento uniforme, movimento uniformemente variado, etc. Mas como um aluno equacionaria este problema, se ele nem sabe qual é o tipo de movimento, e não possui nenhum dado numérico compatível com as equações que ele conhece?

Quando um aluno tenta resolver um problema deste tipo, que aparentemente foge de tudo o que ele aprendeu, é certo que ele deve tentar formular sua solução de outras maneiras. O professor deve incentivar o aluno a tentar abordar o problema de outras formas. Chega a causar espanto como a simples tentativa de se resolver um problema por outras vias pode tornar a solução desse problema em algo trivial, sendo que antes parecia tão impossível.

Uma sugestão geométrica para a solução desse problema é desenhar um gráfico *espaço x tempo* tanto para a subida quanto para a descida. Acompanhe a Figura 1: há dois pontos fixos da trilha em que se conhecem os instantes, tanto na subida quanto na descida, pelos quais o monge passou: seu topo e sua base. À medida que o tempo passa e o monge desenvolve seu percurso, não importa como seu movimento tenha sido: os gráficos deverão se intersectar em algum ponto. Isto prova que houve alguma posição em que houve coincidência de horários.

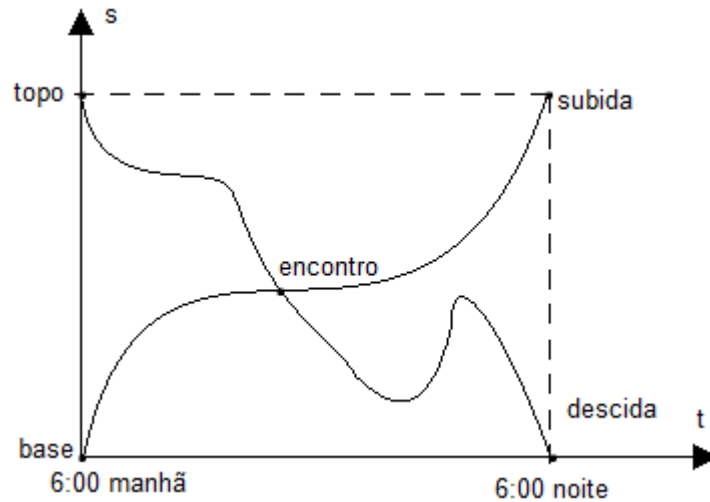


Figura 1: Gráfico para a resolução da Questão 1

Existe ainda outra solução para esse problema, que extrapola tanto a álgebra quanto a geometria, e vai aos campos da criatividade pura: *deixe o monge subir a montanha da forma que ele quiser. No instante em que ele começar a descer a montanha no dia seguinte, faça com que um segundo monge comece a subir a trilha, da exata mesma forma em que o primeiro monge subiu no dia anterior. Em algum ponto, os dois monges irão se encontrar na trilha (garantido pelo fato de a trilha ser unidimensional e ter dois pontos fixos). Isto prova que houve uma posição comum num instante comum.*

Algumas soluções gráficas, como a da **Questão 1**, não carecem de outras ferramentas geométricas além do próprio traçado do gráfico. Outras, porém, demandam algumas outras ferramentas aliadas, algumas das quais encontram-se nas próximas sub-seções.

2.3 Tangentes e retas tangentes

2.3.1 Conceitos matemáticos

O conceito mais básico de “tangente” é aplicado a triângulos retângulos. Conforme IEZZI (1978), a tangente de um ângulo agudo é igual ao quociente do cateto oposto pelo cateto adjacente ao ângulo. Assim, na Figura 2, tem-se que $\text{tg}\theta = b/a$.

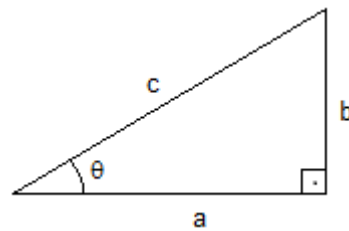


Figura 2: Triângulo retângulo

Em se tratando de soluções gráficas para problemas de física, torna-se necessário entender-se a utilidade da tangente para além de triângulos retângulos, de forma que possamos utilizar tal ferramenta geométrica em qualquer tipo de gráfico. Daí, torna-se importante o conceito de “reta tangente”, que é fundamental a uma análise aprimorada de gráficos.

Primeiramente, vamos definir “reta secante” a uma curva qualquer como sendo uma reta qualquer que passa por essa curva. Na Figura 3, a reta r é secante à curva c :

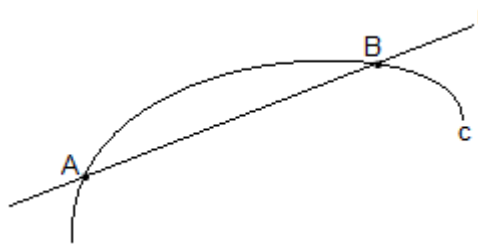


Figura 3: Reta r secante à curva c

Agora, se deixarmos o ponto A fixo e movimentarmos o ponto B sobre a curva c , aproximando-o cada vez mais de A, criamos um feixe de retas secantes à curva c , que possuem A como ponto comum, conforme a Figura 4, em que r , s e q são retas secantes:

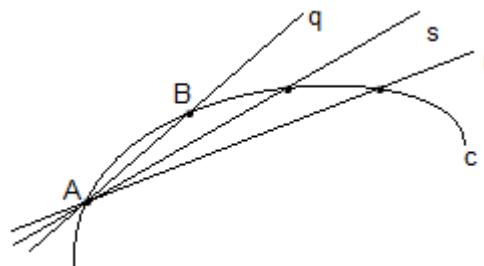


Figura 4: Deslocamento do ponto B em direção a A: feixe de secantes

Quando o ponto B finalmente coincidir com o ponto A, a reta t assim traçada será definida como a “reta tangente à curva c , passando pelo ponto A”, mostrada na Figura 5:

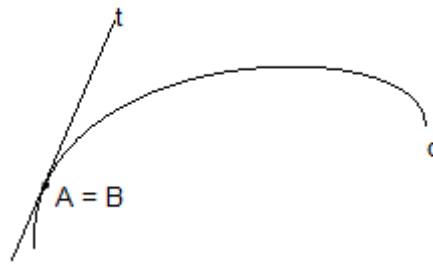


Figura 5: Reta t: tangente à curva c

Uma outra forma de compreender a reta tangente é a seguinte: se pudéssemos “ampliar” a visualização da curva c, na região do ponto A, veríamos que tal parte da curva toma um aspecto cada vez mais reto. Numa ampliação “infinita”, a região reta ao redor de A se confundiria com a reta tangente a esse ponto. Isto é possível de ser visualizado na Figura 6.



Figura 6: A reta tangente a um ponto numa curva é a reta suporte ao segmento definido pelas região imediatamente ao redor do ponto

2.3.2 Aplicações na Física

Em Física, o contexto em que mais a aplicação de uma tangente aparece é na análise de gráficos. O coeficiente angular de uma reta tangente a um ponto (ao qual vamos nos referir apenas de “tangente a um ponto”) num gráfico qualquer traz, muitas vezes, informações extremamente importantes. Como exemplos clássicos, têm-se os dois fatos a seguir, relacionados à Cinemática:

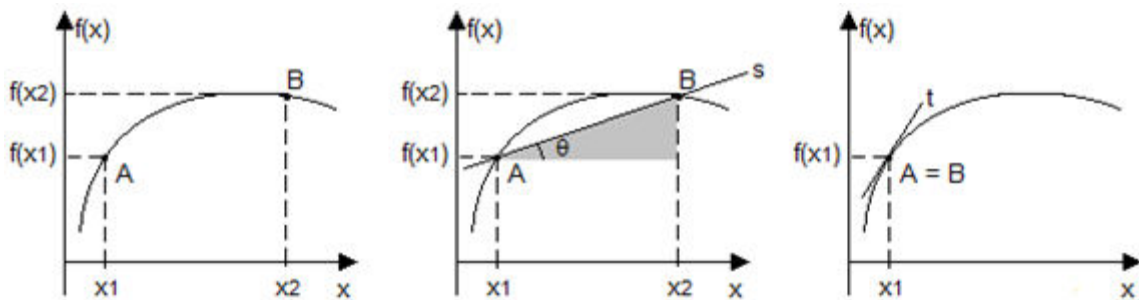
Fato (a): A tangente a um ponto num gráfico *velocidade x tempo* é numericamente igual à aceleração do corpo naquele instante;

Fato (b): A tangente a um ponto num gráfico *espaço x tempo* é numericamente igual à velocidade do corpo naquele instante.

Uma demonstração para os **Fatos (a) e (b)** parte da noção de “taxa de variação”. Muito embora a rigor este conceito seja visto com propriedade apenas no Ensino Superior, os alunos do Ensino Médio podem compreendê-lo com o auxílio da noção geométrica de reta tangente. Para isso, observa-se a sequência de ilustrações da Figura. Numa função qualquer, se tomamos dois de seus pares $(x, f(x))$ quaisquer (por exemplo, os pontos A e B), podemos definir a reta s como sendo secante ao gráfico, passando por A e B. Essa secante s pode ser entendida como sendo a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos, abaixo do gráfico, são paralelos aos eixos x e y . Esse triângulo retângulo possui um ângulo θ cuja tangente é dada por:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Fazendo o ponto B tender ao ponto A, fazemos com que a reta secante s se torne uma reta tangente t , conforme definimos reta tangente. Naturalmente, quanto mais B tende a A, mais x_2 tende a x_1 , o que significa que a distância entre os pontos x_1 e x_2 fica cada vez menor, tendendo a zero.



Geralmente, em Física, trabalha-se com gráficos que mostram evoluções de funções com o tempo, como os gráficos da cinemática *espaço x tempo* e *velocidade x tempo*. Neste contexto, a abscissa x da função torna-se temporal, o que significa que, nos gráficos da Figura, o ponto B tender ao ponto A significa analisar-se intervalos de tempo cada vez mais curtos entre dois pontos do gráfico. Matematicamente, a função de cálculo de tangente terá um denominador temporal cada vez mais curto, à medida que o intervalo Δt aproxima-se de zero e passamos a analisar a função unicamente nas redondezas do ponto considerado:

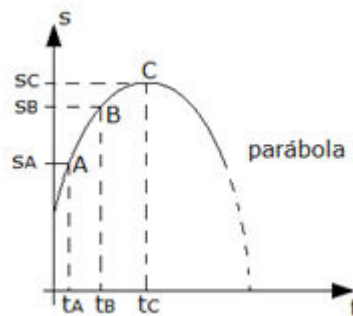
$$tg\theta = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

Se a função f for por exemplo uma posição s , a tangente acima, que informa a velocidade média $\Delta s/\Delta t$ para intervalos de tempo quaisquer, passará a indicar a *velocidade instantânea* do corpo, uma vez que, tomando-se dois instantes muito próximos um do outro, *com intervalo quase nulo*, não haverá tanta variação de espaço entre esses instantes, podendo então ser suposto que tais valores de espaço são aproximadamente iguais; e, como a média de dois valores iguais é o próprio valor, a *velocidade média* nesse contexto passa a ser a própria *velocidade instantânea*. Assim, fica demonstrado o **Fato (a)**. Por analogia, para funções do tipo *velocidade x tempo*, prova-se o **Fato (b)**.

2.3.3 Exemplo de questão

Um exemplo de aplicação de retas tangentes em questões de cinemática pode ser visto na **Questão 2**:

Questão 2 – Vestibular AFA: A figura abaixo apresenta o gráfico posição x tempo para um móvel em movimento retilíneo.



É correto afirmar que

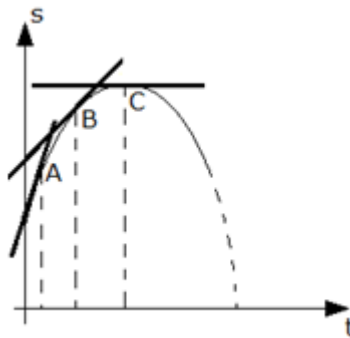
- a velocidade no instante t_A é menor que a velocidade no instante t_B .
- para t_C , a aceleração do móvel é nula.
- para $t_A < t < t_C$, o movimento é acelerado.
- para $t_B < t < t_C$, a velocidade do móvel decresce de maneira uniforme.

Vamos fazer uma análise de cada uma das alternativas.

a) Num gráfico *espaço x tempo*, o coeficiente angular da reta tangente a um ponto desse gráfico fornece a velocidade instantânea que o móvel possui no instante considerado.

Para um ângulo pertencente a $]0, 90^\circ[$, sua tangente é *positiva e crescente* com o ângulo, e que, para um ângulo pertencente a $] -90^\circ, 0[$, sua tangente é *negativa e decrescente* com o ângulo. Isso tudo significa que, ao traçarmos retas tangentes em um gráfico *espaço x tempo*, as retas crescentes indicam velocidades positivas, que são tão maiores quanto maior for a inclinação (para cima) da reta. Já as retas decrescentes indicam velocidades negativas, que são tão menores quanto maior for a inclinação (para baixo) da reta. No caso de um ângulo de tangente de 0° (reta paralela ao eixo das abscissas), a velocidade é nula.

Vamos analisar a velocidade instantânea do móvel em cada um dos pontos A, B e C do gráfico, através do método das retas tangentes:



Como pode-se ver facilmente, $v_A > v_B > v_C = 0$. Portanto, a afirmativa é incorreta.

b) O que é nulo com certeza nesse ponto é a velocidade. Se a aceleração também fosse nula, o gráfico tomaria forma de uma função constante na região à direita de C, pois o móvel não teria velocidade nem aceleração nesse período. Mas o que notamos é que o gráfico continua sua curvatura, e uma parábola num gráfico espaço-tempo denota um movimento continuamente acelerado (no caso, com aceleração negativa, pois a concavidade da parábola está voltada para baixo). Logo, a afirmativa é incorreta.

c) Existem duas boas formas de se verificar se um movimento é acelerado ou retardado.

A primeira delas é: *se os sinais da velocidade e da aceleração coincidem, o movimento é acelerado; se os sinais são contrários, o movimento é retardado*. Vendo o problema por este ângulo, percebemos, pelas retas tangentes já mencionadas na alternativa (a), que a velocidade entre A e C é sempre positiva por estarem inclinadas num ângulo entre 0 e 90° , mas a concavidade da parábola é para baixo, denotando aceleração negativa. Como os sinais da ve-

locidade e da aceleração são contrários, o movimento é retardado, e então a alternativa está incorreta.

A segunda delas é: *se o módulo da velocidade aumenta, o movimento é acelerado; se diminui, é retardado*. Vendo as retas tangentes da alternativa (a), é fácil ver que a inclinação dessas retas diminui, o que significa que a velocidade possui módulo cada vez menor, de modo que entre A e C o movimento seria retardado.

d) Entre B e C, de fato, a velocidade decresce, o que é fácil de ver pelas retas tangentes que ficam cada vez mais negativamente inclinadas. E esse decrescimento acontece de maneira uniforme, pois a aceleração é constante – e isso nos é garantido pelo fato de o gráfico *espaço x tempo* ser uma parábola. Esta afirmativa está correta.

2.4 Áreas

2.4.1 Conceitos matemáticos

O conceito de área está relacionado à “extensão” das superfícies limitadas por figuras planas, como mostrado em MORGADO *et al* (2002). “Extensão” é um conceito primitivo na matemática, sendo portanto aceito sem uma definição precisa. Porém, uma forma interessante de se compreender melhor o sentido de tal conceito, especialmente no Ensino Básico, é imaginar que, se duas figuras planas forem desenhadas numa folha de papel, recortadas e pesadas em uma balança de precisão, a figura que pesasse mais teria maior área; se os pesos medidos fossem iguais, estaria assim verificado que as figuras teriam mesma área, independentemente de suas formas. A Figura 7 mostra quatro regiões planas diferentes, sendo válido que, em relação às suas áreas, $A = B$, $A > C$ e $A < D$.



Figura 7: Figuras e suas áreas

O conceito de área também traz consigo duas operações básicas: a *soma* e a *diferença*. Se duas figuras, E e F, são tais que sua interseção seja vazia, definimos soma ($E + F$) de suas áreas como a área da reunião de suas superfícies, enquanto definimos a diferença ($E - F$) entre

suas áreas como a área da figura formada pelos pontos de E que não pertencem a F – tudo isto melhor compreendido visualizando-se a Figura 8.

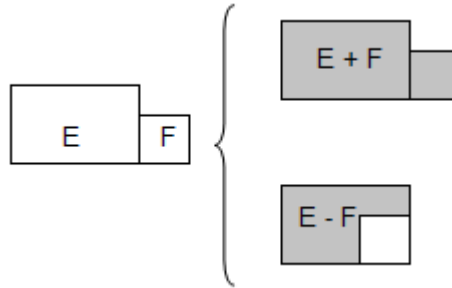


Figura 8: Soma e diferença de áreas

As operações *soma* e *diferença* permitem que uma figura qualquer pode ser decomposta em várias outras figuras, de tal forma que a figura original tenha área como sendo a soma das áreas de suas partes. Assim, na Figura 9 é possível constatar que $A_1 = A_2 + A_3 + A_4$.



Figura 9: Decomposição de uma área em áreas menores

A possibilidade de se entender uma figura plana qualquer como sendo composta por várias outras figuras menores dá margem para um entendimento melhor das relações de áreas. Em muitos casos, figuras diferentes que possuem a mesma área podem ser verificadas com a aplicação dessa propriedade, conforme a Figura 10, que mostra que $A_1 = A_2$, devido a um corte feito a figura A_2 que a separa em duas regiões, A_3 e A_4 . Rotacionando-se A_4 , esta parte se encaixa perfeitamente em A_3 , formando uma figura congruente a A_1 e, portanto, de mesma área:

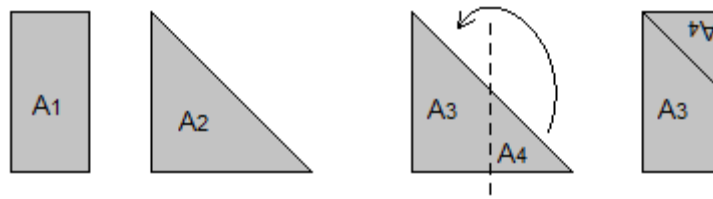


Figura 10: Operações com áreas

Investigando esta situação um pouco mais a fundo, de forma a analisar matematicamente o ocorrido, pode-se dar um exemplo numérico. Acompanhando a Figura 11, seja A_1 um retângulo de base x e altura $2x$, e A_2 um triângulo de base e altura ambas $2x$. Uma secção feita no ponto médio de A_2 , paralela à sua altura, dividirá A_2 em duas figuras: um trapézio A_3 e um triângulo A_4 . Como a secção foi feita paralela a um dos lados do triângulo original A_2 , tem-se que A_2 e A_4 serão semelhantes. Tal semelhança garante uma proporção entre os comprimentos dos lados desses dois triângulos. Portanto, se A_2 possuía tanto base como altura valendo $2x$, o fato da secção ter deixado A_4 com base x garantirá por semelhança que sua altura também seja x , de modo a manter-se a proporção. Como A_4 possui então tanto base quanto altura x , esta figura encaixará perfeitamente sobre a área A_3 na posição mostrada, montando-se uma figura igual a A_1 . Portanto, se $A_2 = A_3 + A_4$, e também $A_1 = A_3 + A_4$, logo $A_1 = A_2$.

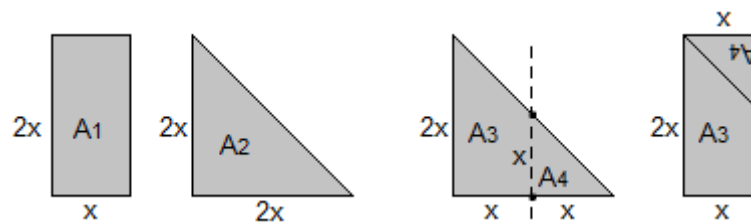
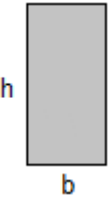
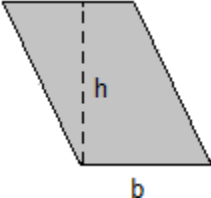
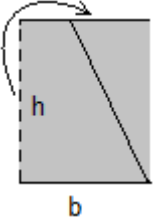
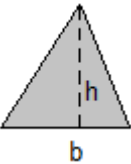
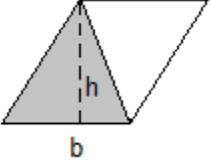
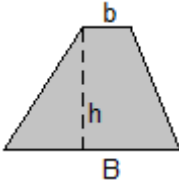
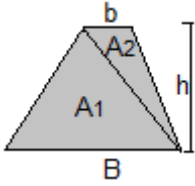


Figura 11: Análise numérica de operações com áreas

Partindo-se do conceito de que o valor numérico da área de um retângulo é o produto de sua base por sua altura, e utilizando-se das propriedades acima, encontram-se fórmulas para o cálculo numérico da área de diferentes figuras:

Figura	Fórmula	Comentários
<p data-bbox="229 286 368 320">Retângulo</p> 	$A = b \cdot h$	<p data-bbox="772 344 1437 551">Aceita-se tal fórmula como axiomática na geometria do Ensino Básico. No Ensino Superior, poder-se-ia entender melhor a origem desta fórmula a partir do conceito geométrico da integral definida.</p>
<p data-bbox="229 665 424 698">Paralelogramo</p> 	$A = b \cdot h$	<p data-bbox="772 674 1225 1104">Uma secção que passa pela altura do paralelogramo o divide em um triângulo retângulo e um trapézio, sendo que a hipotenusa do triângulo encaixa perfeitamente num dos lados do trapézio. Isto forma um retângulo, cuja fórmula já é conhecida.</p> 
<p data-bbox="229 1131 360 1164">Triângulo</p> 	$A = \frac{b \cdot h}{2}$	<p data-bbox="772 1140 1177 1516">Todo triângulo, se for rotacionado em 180° e encaixado a outro igual ao original, forma um paralelogramo. É claro que o triângulo original terá área igual a metade da área do tal paralelogramo.</p> 
<p data-bbox="229 1568 347 1601">Trapézio</p> 	$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$	<p data-bbox="772 1574 1177 1892">Todo trapézio pode ser dividido em dois triângulos de alturas iguais. A soma das áreas desses triângulos de mesma altura mas bases diferentes dá origem à fórmula mencionada.</p> 

2.4.2 Aplicações na Física

Nas questões de Física do Ensino Médio, o contexto em que mais o cálculo de área é aplicável é na análise de gráficos. A área de um gráfico qualquer traz, muitas vezes, informações extremamente importantes. Como exemplos clássicos, têm-se os dois fatos a seguir, relacionados à Cinemática:

Fato (a): A área de um gráfico *velocidade x tempo*, durante dois instantes quaisquer, é numericamente igual ao deslocamento efetuado pelo corpo entre esses instantes;

Fato (b): A área de um gráfico *aceleração x tempo*, durante dois instantes quaisquer, é numericamente igual à variação de velocidade do corpo entre esses instantes.

O maior desafio em relação a isso é mostrar para o aluno que as propriedades gráficas relacionadas à área não dependem da forma do gráfico. É comum que professores e livros realizem a seguinte abordagem: demonstram a propriedade para gráficos de funções do 1º grau (cujas áreas são facilmente calculáveis, por poderem ser quebradas em triângulos) e a partir daí informam que a propriedade continua válida para outras funções; por exemplo, em RAMALHO *et al* (2007) é realizada esta abordagem.

Uma abordagem alternativa, bem interessante, pode ser feita a partir de noções de análise matemática. Muito embora o conceito de integral definida, que é o instrumento formal para análise gráfica na matemática, não seja aprendido no Ensino Básico, o aluno desse nível pode compreender o que há por trás do cálculo dessas áreas a partir de conceitos simples e geométricos sobre limites. Pode-se tomar um gráfico qualquer e mostrar para o aluno que, se esse gráfico for dividido em retângulos de mesma base, a soma de suas áreas será aproximadamente igual à área do gráfico, e que essa aproximação melhora à medida que o número de retângulos aumenta, o que leva a crer que infinitos retângulos preencheriam perfeitamente a área do gráfico dado. Portanto, se uma propriedade gráfica qualquer relativa a áreas é válida para áreas retangulares, ela será válida para qualquer forma geométrica, já que qualquer forma geométrica pode ser decomposta em retângulos. Isto está mostrado na Figura 12.

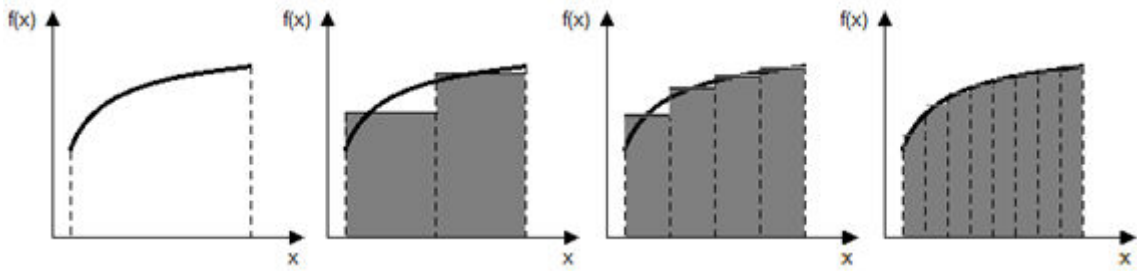
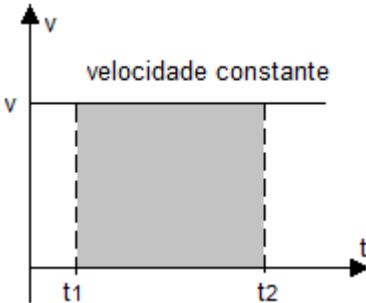
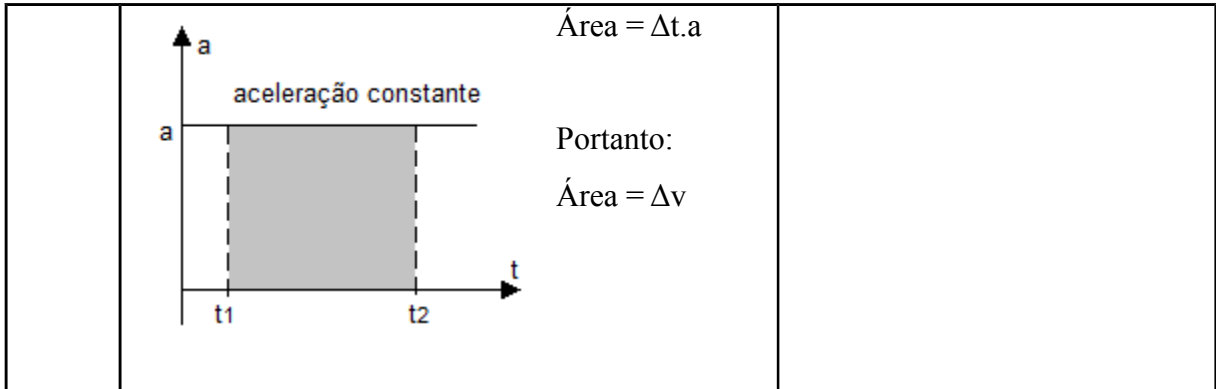


Figura 12: "Quebra" de área sob um gráfico em vários retângulos

Portanto, uma vez mostrado o procedimento acima, pode-se demonstrar os fatos (a) e (b) aos alunos:

Fato	Demonstração para função constante	Extrapolção para qualquer função
(a)	<div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p>Retângulo: Área = b.h</p> <p>Assim: Área = Δt.v</p> <p>Portanto: Área = Δs</p> </div> </div>	<p>Se o fato é demonstrável através do cálculo de área de uma função constante, logo ele será válido para qualquer outra função, posto que a área sob o gráfico de qualquer função pode ser compreendida como sendo a soma de áreas sob o gráfico de infinitas funções constantes.</p>
(b)	<p>Retângulo: Área = b.h</p> <p>Assim:</p>	



2.4.3 Exemplo de questão

Um exemplo de aplicação de cálculo de áreas em questões de cinemática pode ser visto na **Questão 3**:

Questão 3 – Formulação própria: Um automóvel, partindo do repouso, percorre um trajeto retilíneo da seguinte forma:

- inicialmente, mantém uma aceleração contante igual a 4 m/s^2 ;
- após 10 s, começa a frear uniformemente com aceleração de 2 m/s^2 ;
- ao atingir velocidade nula, cessa permanentemente seu movimento.

Determinar a máxima velocidade atingida pelo automóvel, o tempo total de movimento e a distância total percorrida.

A resolução desta questão pelo método gráfico fica extremamente elegante. Um gráfico *velocidade x tempo* da situação pode ser desenhado, como ilustra a Figura 13:

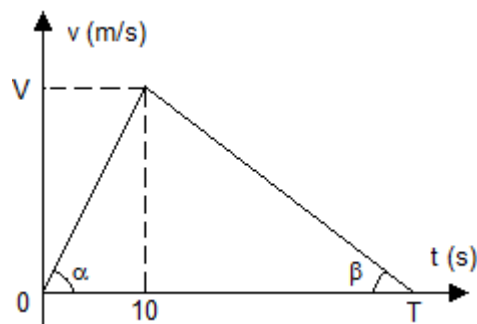


Figura 13: Gráfico $v \times t$ da Questão 3

Neste gráfico, assinalou-se V como sendo a máxima velocidade atingida pelo automóvel e T o tempo total de movimento. Os ângulos α e β , pela propriedade das tangentes, são tais que $\operatorname{tg}\alpha = 4$ e $\operatorname{tg}\beta = 2$. Além disso, tais ângulos pertencem a triângulos retângulos com catetos bem definidos no gráfico, valendo então equacionar:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{V}{10} \Rightarrow 4 = \frac{V}{10} \Rightarrow V = 40 \text{ m/s}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{V}{T-10} \Rightarrow 2 = \frac{40}{T-10} \Rightarrow T = 30 \text{ s}$$

Para se determinar a distância total percorrida pelo automóvel, basta agora encontrar a área sob o gráfico referente ao movimento completo. Agora que se conhece o tempo total de movimento T (base do triângulo) e a a velocidade máxima atingida (altura do triângulo), calcula-se facilmente essa área:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow d = \frac{30 \cdot 40}{2} \Rightarrow d = 600 \text{ m}$$

2.5 Figuras Semelhantes e Razão de Semelhança

2.5.1 Conceitos matemáticos

De acordo com a definição encontrada em MORGADO *et al* (2002), dois polígonos são semelhantes se os ângulos internos forem ordenadamente congruentes e se os lados que formam ângulos congruentes forem proporcionais.

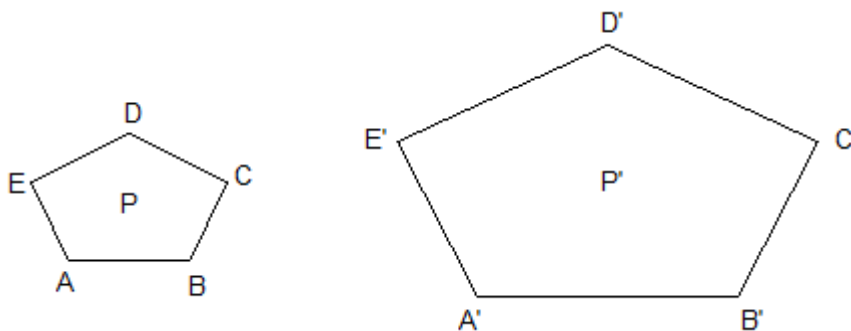


Figura 14: Dois polígonos semelhantes

Assim, para que os polígonos da Figura 14 sejam semelhantes:

$$P \sim P' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \\ \hat{D} = \hat{D}' \\ \hat{E} = \hat{E}' \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} = k \end{array} \right.$$

O fator de proporcionalidade k é comumente denominado “razão de semelhança” na geometria plana.

Da definição de polígonos semelhantes, advém a seguinte propriedade: dois polígonos semelhantes podem ser divididos em igual número de triângulos ordenadamente semelhantes. Se tomamos dois polígonos semelhantes entre si, e traçamos todas as diagonais que partem de dois vértices homólogos, os triângulos formados serão semelhantes, visto que os ângulos manter-se-ão congruentes e os lados proporcionais – à mesma razão de semelhança k . Assim, na Figura 15, temos as seguintes semelhanças de triângulos:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \quad \triangle ACD \sim \triangle A'C'D' \quad \triangle ADE \sim \triangle A'D'E'$$

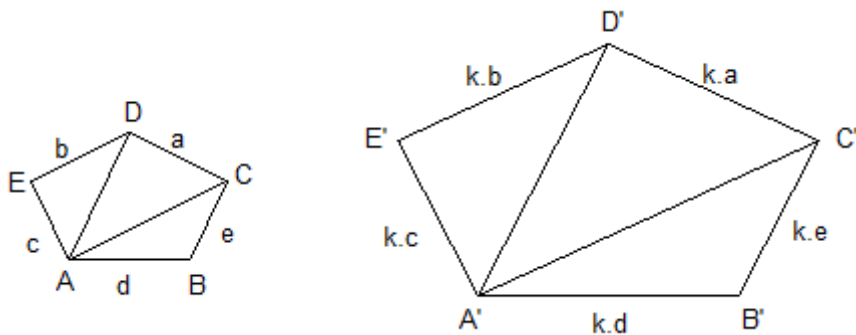


Figura 15: Polígonos semelhantes geram triângulos semelhantes com suas diagonais

Pode-se agora aliar essa propriedade a análises de áreas de polígonos semelhantes. Começando pelo triângulo, que é o polígono mais simples: se dois triângulos semelhantes possuem razão de semelhança k , qual será a razão entre suas áreas? Ver Figura 16.

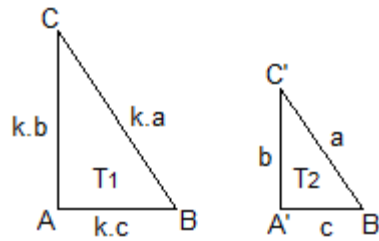


Figura 16: Dois triângulos semelhantes

Aplicando a fórmula de área de triângulo para os triângulos T_1 e T_2 , semelhantes entre si, temos:

$$\text{Área } T_1 = \frac{(k \cdot c) \cdot (k \cdot b)}{2} = k^2 \cdot \frac{bc}{2}$$

$$\text{Área } T_2 = \frac{(c) \cdot (b)}{2} = \frac{bc}{2}$$

$$\boxed{\frac{\text{Área } T_1}{\text{Área } T_2} = k^2}$$

E, como já vimos que todos os polígonos semelhantes entre si podem ser decompostos em triângulos semelhantes entre si, estendemos o alcance da fórmula acima para além dos triângulos e enunciamos que, *se dois polígonos quaisquer são semelhantes e sua razão de semelhança é k , logo a razão entre suas áreas será k^2 .*

Analogamente, é possível demonstrar, na Geometria Espacial, que dois sólidos semelhantes possuem razão entre seus volumes igual a k^3 .

2.5.2 Aplicações na Física

Semelhanças entre figuras podem ser úteis em soluções gráficas variadas, como será visto futuramente em algumas questões de exemplo neste trabalho.

Uma outra aplicação interessante é em questões sobre dilatação térmica. Considerando-se a dilatação de um corpo qualquer como sendo isotrópica, pode-se afirmar que toda figura dilatada será uma figura semelhante à figura original, já que o fator de dilatação será o mesmo em qualquer dimensão desse corpo. Neste caso, o fator de dilatação confundir-se-á com a razão de semelhança associada às figuras. Esta propriedade é interessante pois é válida

tanto para corpos maciços quanto corpos com cavidades quando estes são dilatados, já que a proporção de variação da cavidade é igual à proporção de variação das partes inteiriças. Ressalta-se, contudo, que tudo o que foi especificado neste parágrafo restringe-se a dilatações que preservam constantes os coeficientes de dilatação associados – o que abrange a totalidade (ou quase isso) das questões de Ensino Médio que versam sobre o assunto.

2.5.3 Exemplos de questões

A **Questão 4** ilustra uma aplicação de figuras semelhantes em problemas de solução gráfica:

Questão 4 – Formulação própria: Um carro A, partindo do repouso e em uma estrada reta, acelerar-se constantemente, até atingir certo valor de velocidade máxima. Neste instante, ele começa a reduzir sua velocidade, também constantemente, e com mesmo módulo de aceleração que a inicial. Ao atingir velocidade nula, o carro A para permanentemente.

Um outro carro B repetirá a mesma experiência, com o mesmo módulo de aceleração que o carro A, mas com a diferença de que sua velocidade máxima atingida será o dobro daquela atingida por A.

Se o carro A percorreu 200 m, quantos metros percorrerá o carro B?

Façamos dois gráficos *velocidade x tempo*, um para cada carro, como mostrado na Figura 17. Reparar que, se os módulos de aceleração são todos iguais, os ângulos que os segmentos de reta fazem com o eixo x possuem todos mesmo módulo de tangente, o que significa ângulos internos iguais nos triângulos formados. Além disso, se a velocidade máxima do carro A é V , a do carro B terá de ser $2V$, já que este atingiu o dobro da velocidade máxima daquele.

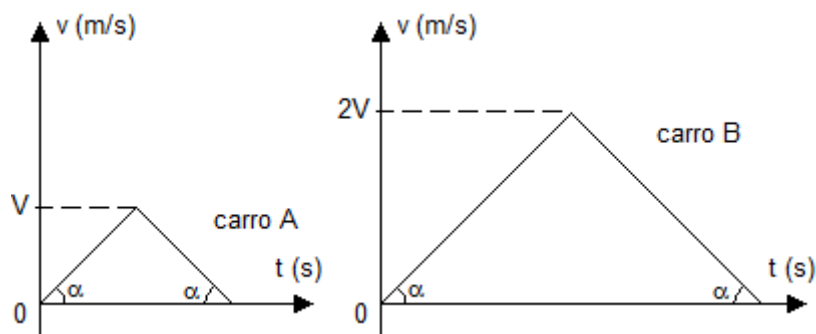


Figura 17: Gráfico da Questão 4

Como os ângulos dos triângulos são iguais, eles serão semelhantes. Como a altura do triângulo B é o dobro da altura do triângulo A, deduz-se que a razão de semelhança será $k = 2$. Portanto, a razão entre as áreas será $k^2 = 4$, o que significa que a área do triângulo B é 4 vezes maior que a área do triângulo A. Agora, como a área sob um gráfico $v \times t$ indica o deslocamento do corpo, isto quer dizer que B deslocou-se 4 vezes a mais que A, tendo deslocado portanto 800 m, que é a resposta da questão.

Já a **Questão 5** ilustra uma aplicação de figuras semelhantes em problemas de dilatação térmica:

Questão 5 – Vestibular AFA: Considere uma chapa quadrada, metálica, de material homogêneo, contendo um orifício circular em seu centro. Se a chapa for aquecida de modo uniforme e o seu lado aumentar em 2%, então a área do orifício

- a) diminuirá em aproximadamente 2%
- b) diminuirá em aproximadamente 4%
- c) aumentará em aproximadamente 2%
- d) aumentará em aproximadamente 4%

A Figura 18 ilustra a clássica dilatação de chapas com furos, que é o tema deste problema:

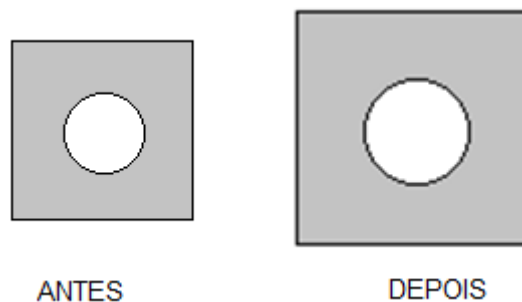


Figura 18: Placa dilatando-se, referente à Questão 5

Ao se dilatar, placas com furos se dilatam como se fossem *inteiriças*, ou seja, os furos se dilatam proporcionalmente às placas, aumentando também seu tamanho na mesma razão em que as placas aumentam.

Como a dilatação da placa e do furo são proporcionais, as figuras da placa furada antes e depois da dilatação são semelhantes. Assim, a razão entre áreas de figuras semelhantes é k^2 , sendo k a razão de semelhança entre as figuras. Se o comprimento aumenta de 2% (ou seja, 0,02), a razão de aumento entre a figura antiga e a nova é de 1,02. Portanto:

$$\frac{A}{A_0} = k^2$$

$$\frac{A}{A_0} = 1,02^2 = 1,0404 \Rightarrow A \approx 1,04 A_0$$

Ou seja, o que significa um aumento de cerca de 4% da área inicial, que é a mesma para todo pedaço da placa, inclusive para o buraco.

2.6 Outras questões interessantes

As **Questões 6, 7 e 8** a seguir são outras questões que podem ser resolvidas de forma bem interessante com recursos da Geometria Plana.

Questão 6 – BRITO (2011): Quatro automóveis (A, B, C e D) movem-se em uma estrada reta, todos com velocidade constante. A ultrapassa B às 8:00 h, ultrapassa C às 9:00 h e cruza com D às 10:00 h. D cruza com B às 12:00 h e com C às 14:00 h. Determine a que horas B ultrapassa C.

Cada móvel tem a sua velocidade própria e constante. Interessa-nos, inicialmente, entender quais são os sentidos dessas velocidades. Se adotarmos a velocidade de A como positiva, e relendo as informações sobre ultrapassagens e cruzamentos do enunciado, fica claro que A, B e C possuem mesmo sentido de velocidade entre si (sendo portanto todas positivas no nosso referencial), mas contrário ao sentido da velocidade de D (e portanto D terá velocidade negativa). Além disso, se A ultrapassou B e C, certamente A possui velocidade maior que as de B e C.

De posse dessas informações, podemos montar o seguinte gráfico *espaço x tempo* da Figura. Note que tudo o que acontece antes ou depois do período entre 8:00 e 14:00 é irrelevante para esta questão, sendo portanto irrelevante os valores de posição inicial que arbitramos para os móveis. Notar que é mais fácil fazer o traçado do gráfico na seguinte ordem: A, D, B, C – isto porque o número de restrições impostas a cada carro faz com que, quanto mais se adiem tais restrições, mais difícil fica montar o gráfico. Uma incógnita “x” mostra o que é pedido no problema.

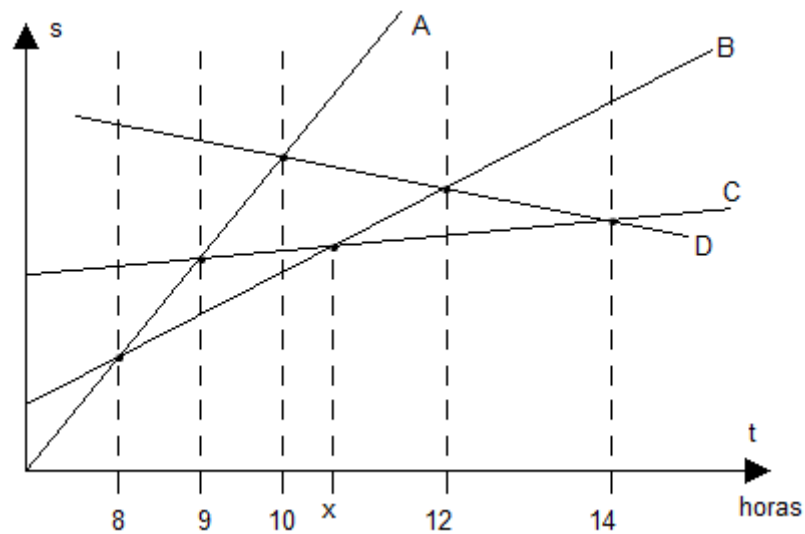


Figura 19: Gráfico espaço x tempo referente à Questão 6

Para quem está bem acostumado com Geometria Plana, nota-se de imediato uma estrutura que se encaixa no Teorema de Menelaus. Este teorema traz relações entre segmentos de reta quando um triângulo qualquer possui uma reta que corta as três retas suportes de seus lados. Podemos enxergar essa estrutura melhor se “limparmos” um pouco o gráfico e destacarmos um triângulo e uma reta que corta as três retas de seus lados, conforme a Figura. Perceba como a reta HJ corta o triângulo EFG:

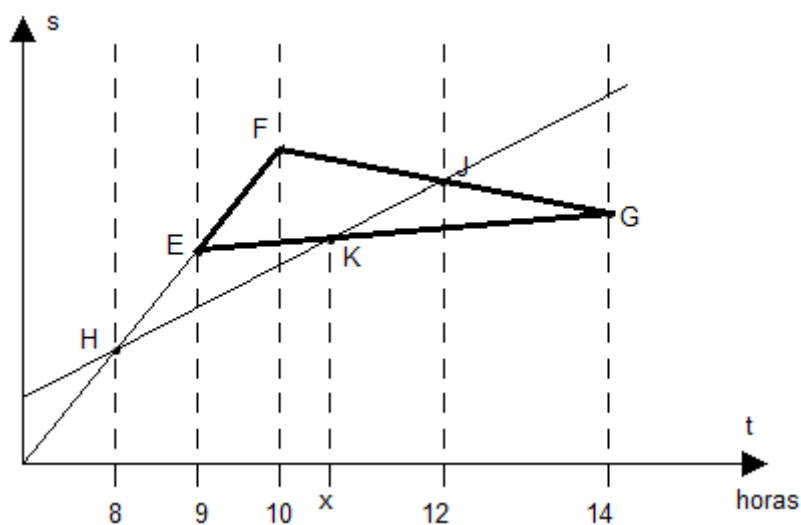


Figura 20: Destaque ao triângulo cortado por uma reta, no gráfico referente à Questão 6

Aplicando o Teorema de Menelaus à situação:

$$\frac{KG}{KE} \cdot \frac{HE}{HF} \cdot \frac{JF}{GJ} = 1$$

Mas sabemos que:

$$JF = GJ \text{ (pois J é ponto médio do segmento FG)}$$

$$HF = 2HE \text{ (pois E é ponto médio do segmento HF)}$$

Aplicando essas informações à equação de Menelaus, obtemos:

$$\frac{KG}{KE} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow KG = 2KE$$

A informação $KG = 2KE$ faz com que suas projeções horizontais obedeçam à mesma proporção. Portanto:

$$14 - x = 2 \cdot (x - 9)$$

Resolvendo, obtemos $x = 32/3 \text{ h} = 640 \text{ min} = 10:40$, horário da ultrapassagem pedida.

Questão 7 – SARAIEVA *et al* (1985): Um engenheiro trabalha numa fábrica, que fica nos arredores da cidade. Diariamente ao chegar à última estação ferroviária, um carro que vem da fábrica transporta-o para o local de trabalho (o carro chega à estação sempre no mesmo instante que o engenheiro). Certa vez, o engenheiro chegou à estação uma hora antes do habitual e, sem esperar o carro, foi a pé até o local de trabalho. No caminho encontrou-se com o carro, chegando assim à fábrica 10 min antes do habitual. Quanto tempo caminhou o engenheiro antes de encontrar-se com o carro? Considerar que os módulos das velocidades do carro e do engenheiro são sempre constantes, e que o módulo da velocidade do carro na ida é igual ao da volta à fábrica.

Vamos construir um gráfico *espaço x tempo* para a história do enunciado. Inicialmente, façamos apenas o gráfico da situação habitual, que é aquela em que o carro da fábrica chega à estação no exato instante em que o engenheiro lá chega, e já parte para levá-lo para a fábrica, com velocidade de mesmo módulo que antes. Vamos adotar o instante em que o carro pega o engenheiro na situação habitual como origem temporal do gráfico. Com isso, obtemos o mostrado na Figura, sendo “t habitual” o instante habitual em que o engenheiro chega à fábrica:

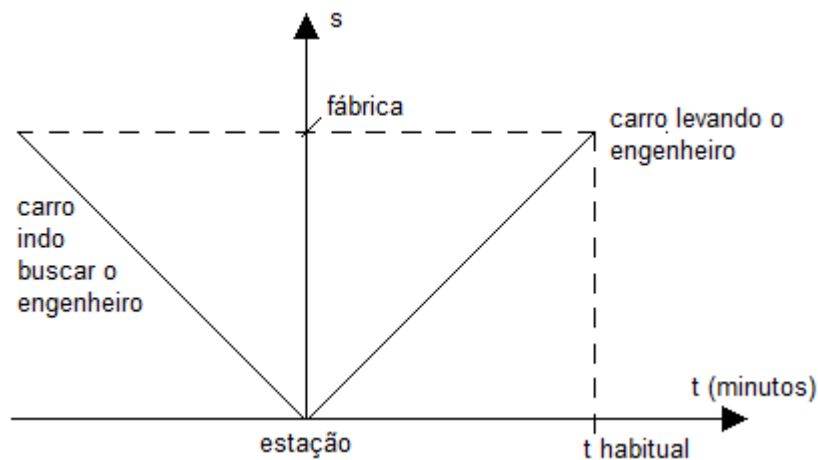


Figura 21: Gráfico $s \times t$ referente à Questão 7

Vamos agora acrescentar a esse gráfico a situação “anormal”: o engenheiro, chegando à estação 1 hora (60 minutos) antes do que é de costume, começa a andar em direção à fábrica, com uma velocidade menor que o carro, encontrando-se com este no instante “x”, que então o leva à fábrica, lá chegando 10 minutos antes do tempo habitual:

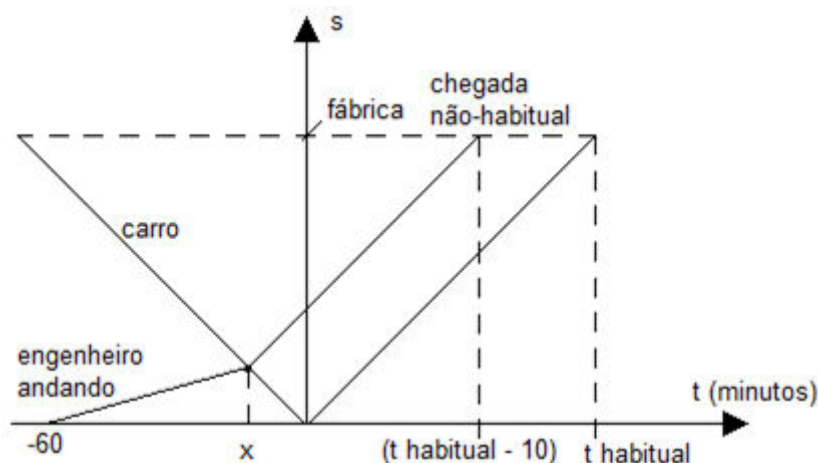


Figura 22: Complementos ao gráfico da Questão 7

Vamos agora “limpar” um pouco o gráfico, e reparar que, se o módulo de velocidade do carro sempre se mantém, os ângulos agudos de inclinação de algumas retas são iguais (já que o coeficiente angular da reta tangente num gráfico $s \times t$ é a velocidade do corpo), o que define alguns triângulos isósceles:

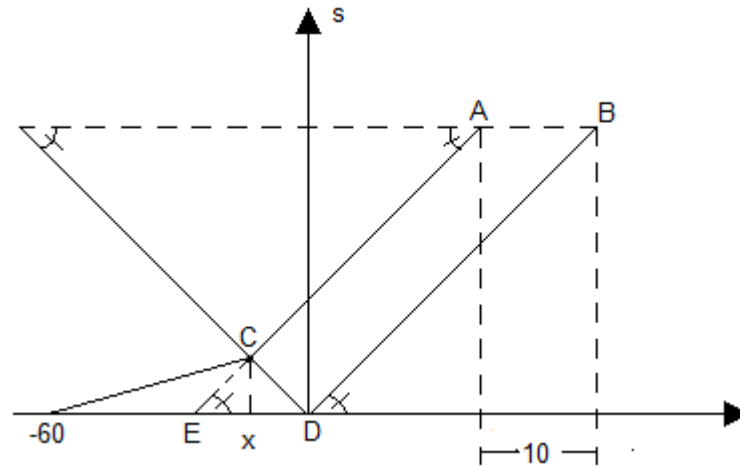


Figura 23: Gráfico da Questão 7 com alguns elementos explicitados

Reparar que a reta CA é paralela à reta DB, já que a velocidade do carro sempre possui mesmo módulo. O prolongamento CE gera uma nova reta EA também paralela a DB. Esse paralelismo faz com que o segmento horizontal ED tenha o mesmo comprimento que o segmento horizontal AB. Além do mais, como o triângulo CED é isósceles, sendo $CE = CD$, a altura de C em relação à horizontal (que a corta no ponto de instante x) corta ED ao meio, de forma que o ponto x é médio entre E e D. Como $ED = 10$, Dx deve então valer 5; e, em estando x à esquerda da origem, o valor algébrico de x é -5 min.

Como o problema pede por quanto tempo o homem andou até que o carro o pegasse nessa situação não-habitual, se ele começou sua caminhada no instante -60 e foi pego no instante -5 , então a resposta do problema é 55 min.

Questão 8 – SARAIVA *et al* (1985); vestibular ITA: Três turistas, reunidos num mesmo local e dispendo de uma bicicleta que pode levar somente duas pessoas de cada vez, precisam chegar ao centro turístico o mais rápido possível. O turista A leva o turista B de bicicleta até um ponto x do percurso e retorna para apanhar o turista C, que vinha caminhando ao seu encontro. O turista B, a partir de x , continua a pé sua viagem rumo ao centro turístico. Os

três chegam simultaneamente ao centro turístico. A velocidade média como pedestre é v_1 , enquanto que como ciclista é v_2 . Com que velocidade média os turistas farão o percurso total? Dar a resposta em função apenas de v_1 e v_2 .

Façamos um gráfico *espaço x tempo* para a situação, observando que, se as velocidades mantêm seus módulos constantes:

- os ângulos agudos que as retas dos pedestres fazem com a horizontal são todos iguais a um valor único (denominado aqui de α , e com tangente dada por $\text{tg}\alpha = v_1$);

- os ângulos agudos que as retas da bicicleta fazem com a horizontal são todos iguais a um valor único (denominado aqui de β , e com tangente valendo $\text{tg}\beta = v_2$).

Isso está mostrado no gráfico da Figura, em que cada segmento traz consigo a informação de pertence a um pedestre (B ou C), ao ciclista (A) ou ao conjunto do ciclista com um carona (A+B ou A+C). Também foram incluídas nessa figura duas incógnitas: d (que corresponde ao deslocamento total que deve ser efetuado) e T (tempo total de movimento). Tais variáveis foram incluídas pois a sua razão d/T será a velocidade média global da situação, que é a pergunta do problema.

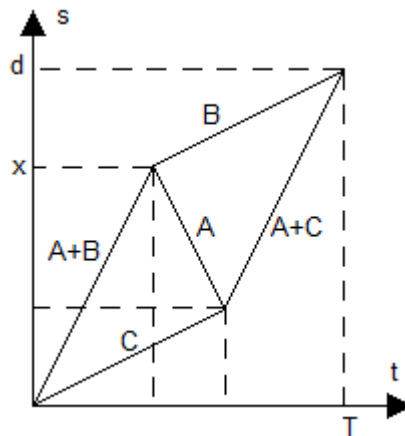


Figura 24: Gráfico referente à Questão 8

Vamos agora fazer uma nova figura, com alguns pontos e ângulos anotados.

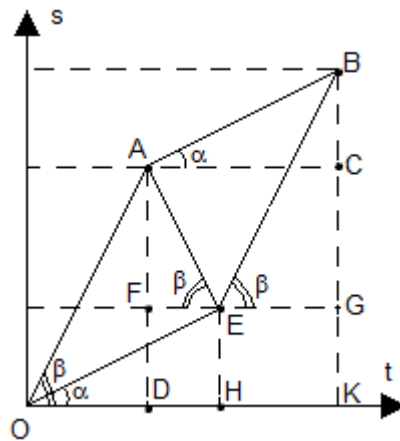


Figura 25: Gráfico da Questão 8, com alguns elementos geométricos explicitados

A primeira coisa que observamos é que, se OE é paralelo a AB, e AO paralelo a BE, o quadrilátero OABE é um paralelogramo. Isto implica:

- as projeções horizontais de AO e EB terem o mesmo valor: $OD = HK$ (chamaremos de a)
- as projeções verticais de AB e OE terem o mesmo valor: $BC = EH$ (chamaremos de c)
- as projeções verticais de AO e EB terem o mesmo valor: $AD = BG$ (chamaremos de d + c)
- as projeções horizontais de AB e OE terem o mesmo valor: $AC = OH$ (chamaremos de b + a)

Transportando essas informações para o gráfico, temos a Figura:

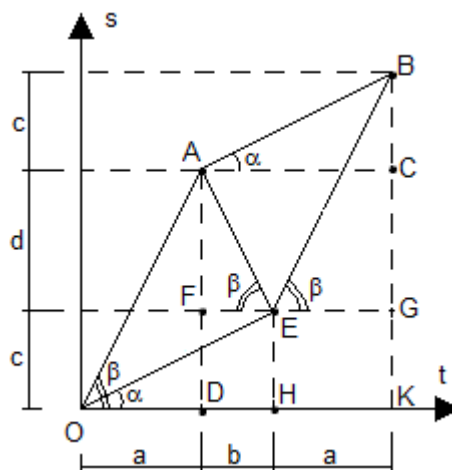


Figura 26: Gráfico da Questão 8, com alguns dados geométricos

O problema deseja saber a velocidade média global do processo, que naturalmente será dada por:

$$v = \frac{2c + d}{2a + b} \quad (\text{equação 1})$$

Sabemos as velocidades dos corpos e, conseqüentemente, as tangentes dos ângulos marcados. Portanto:

- No triângulo OEH:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{EH}{OH} \Rightarrow v_1 = \frac{c}{a + b} \Rightarrow c = v_1(a + b) \quad (\text{equação 2})$$

- No triângulo EAF:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{AF}{EF} \Rightarrow v_2 = \frac{d}{b} \Rightarrow d = v_2 \cdot b \quad (\text{equação 3})$$

- No triângulo OAD:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{AD}{OD} \Rightarrow v_2 = \frac{d + c}{a} \quad (\text{equação 4})$$

Temos um sistema de 4 equações a resolver. Podemos inicialmente reduzir para duas, se substituirmos as equações 2 e 3 nas equações 1 e 4. Com isso, obtemos as equações 5 e 6:

$$v = \frac{2v_1(a + b) + v_2 \cdot b}{2a + b} \quad (\text{equação 5})$$

$$v_2 = \frac{v_2 \cdot b + v_1(a + b)}{a} \quad (\text{equação 6})$$

Agora, isolamos b na equação 6 e substituímos na equação 5, para finalmente encontrarmos a solução:

$$v = \frac{v_2(3v_1 + v_2)}{v_1 + 3v_2}$$

3 Recursos da Geometria Analítica

A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo.

Pitágoras

3.1 Introdução

A Geometria Analítica é capaz de providenciar ferramentas muito interessantes para a Física, dado que esta área da matemática relaciona de fato a Álgebra com a Geometria.

Sendo uma área extremamente vasta e rica de resultados, nesta seção exploraremos apenas alguns recursos da Geometria Analítica, que possuem aplicação em problemas de Física do Ensino Médio. Normalmente, a Geometria Analítica é ensinada no 3º ano do Ensino Médio, de forma que pressupõe-se que, a esta época, o aluno já esteja familiarizado com alguns conceitos matemáticos, como trigonometria, matrizes e determinantes, mesmo que de uma forma bem básica (que é o que interessa realmente aqui).

3.2 Algoritmo de Gauss para cálculo de áreas

3.2.1 Conceitos matemáticos

O algoritmo de Gauss consiste numa forma de se calcular a área de polígonos simples, quando se conhece as coordenadas de seus vértices. Um polígono simples é um polígono cujos lados não adjacentes não se interceptam, ou seja, o polígono simples define no plano apenas duas regiões: a interna e a externa a si, sendo que os polígonos não-simples (ou polígonos complexos) podem dividir o plano em várias regiões separadas. A Figura 27 permite que se entenda facilmente tal conceito.

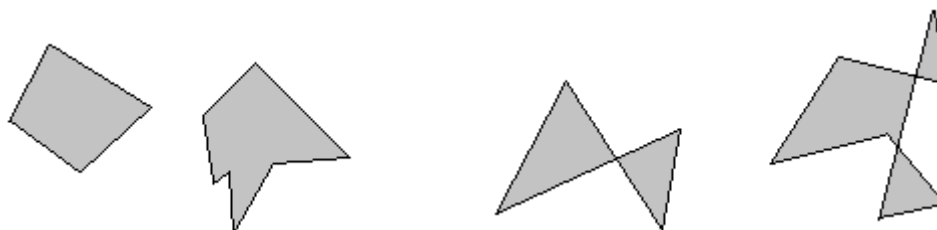


Figura 27: Os dois polígonos da esquerda são simples, enquanto os dois polígonos da direita são complexos.

Quando se conhecem as “n” coordenadas (x_i, y_i) dos vértices de um polígono simples qualquer, o algoritmo de Gauss permite que se encontre sua área com o seguinte procedimento:

- os vértices (x_i, y_i) são caracterizados em sequência $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$ tomando-se um dos vértices quaisquer como o primeiro e, a seguir, atribuindo a ordenação aos outros vértices na sequência em que eles aparecem no polígono. Tanto faz tomá-los em forma horária ou anti-horária, desde que seja em sequência no polígono;

- ordenados os vértices de acordo com o critério acima, calcula-se a área do polígono de acordo com a Fórmula 1.

$$A = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_{i+1} + x_n y_1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} y_i - x_1 y_n \right|$$

Fórmula 1

O algoritmo de Gauss pode ser melhor entendido (especialmente para alunos do Ensino Médio) quando, ao invés de se operar com a fórmula anterior, trabalha-se com uma forma tabular do algoritmo, ou seja, criando-se uma tabela e, a partir dela, fazendo-se o cálculo. Essa forma é apresentada a seguir, utilizando como exemplo um polígono simples contendo 5 vértices, conforme a Figura 28:

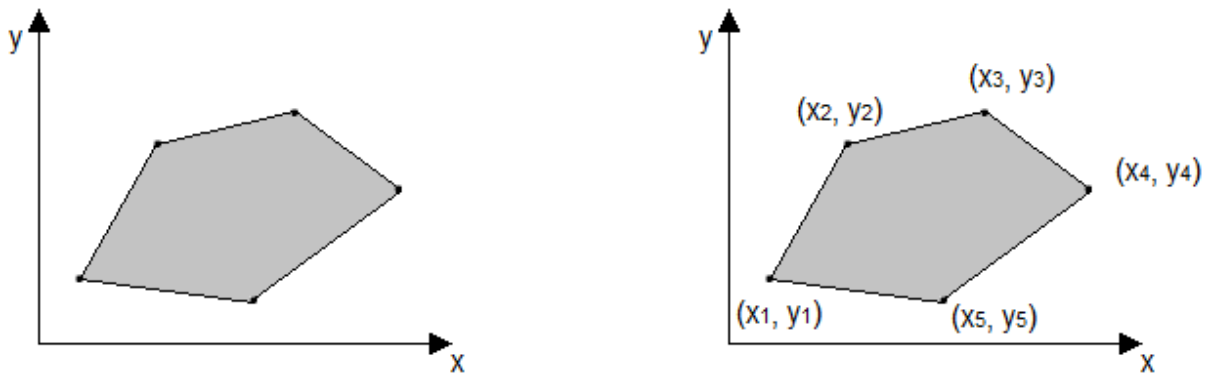


Figura 28: Polígono simples de 5 vértices, sendo que estes são ordenados tomando-se algum vértice qualquer como inicial e ordenando os outros em seqüência horária

Dado o polígono, arbitra-se um de seus vértices como o inicial, e a partir dele, toma-se um sentido (horário ou anti-horário) a fim de se ordenar seus outros vértices. No caso da Figura 28, tomou-se como vértice inicial aquele mais próximo da origem, sendo que os outros vértices foram ordenados numa seqüência horária. Ordenados os vértices, faz-se uma tabela que siga, na vertical, uma disposição ordenada das coordenadas dos vértices, sendo que, ao final desta tabela, repetem-se as coordenadas do primeiro vértice (de forma a concordar com o Algoritmo de Gauss). Tal tabela está montada na Figura 29. Feita a tabela, procede-se o cálculo da seguinte forma:

- multiplica-se cada coordenada x de uma linha pela coordenada y da linha seguinte, a começar pela primeira coordenada x e procedendo até a última coordenada y da tabela. Tais produtos vão sendo somados;

- multiplica-se cada coordenada y de uma linha pela coordenada x da linha seguinte, a começar pela primeira coordenada y e procedendo até a última coordenada x da tabela. Tais produtos vão sendo subtraídos do montante acumulado no passo anterior;

- toma-se o módulo (valor absoluto) do montante acumulado nos dois passos acima, e divide-o por 2.

Os três passos acima constituem na realidade um método prático e de fácil aplicação que conduz ao resultado da Fórmula 1. O processo lembra um pouco o cálculo de um determinante pela Regra de Sarrus – muito embora, não estejamos calculando um determinante, visto que tal tabela não é uma matriz quadrada, e muito menos de ordem 3 por 3.

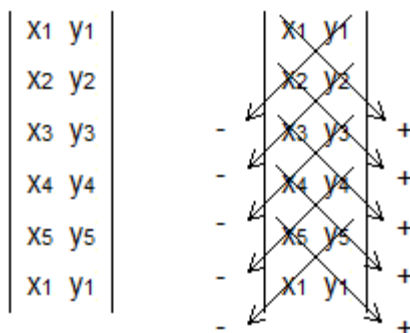


Figura 29: Algoritmo de Gauss em forma tabular para um polígono simples de 5 vértices

3.2.2 Aplicações na Física

Conhecendo-se o Algoritmo de Gauss, pode-se portanto calcular com rapidez a área de qualquer polígono simples que possua vértices de coordenadas conhecidas. As aplicações disso na Física do Ensino Médio são basicamente as mesmas para **áreas** de forma geral na Física, sendo que algumas aplicações destas que já foram exploradas neste trabalho. Contudo, o diferencial do uso do Algoritmo de Gauss consiste em ser uma forma de cálculo de áreas bem mais simples quando todos os vértices de um polígono forem conhecidos, o que pode acontecer em problemas que envolvem gráficos.

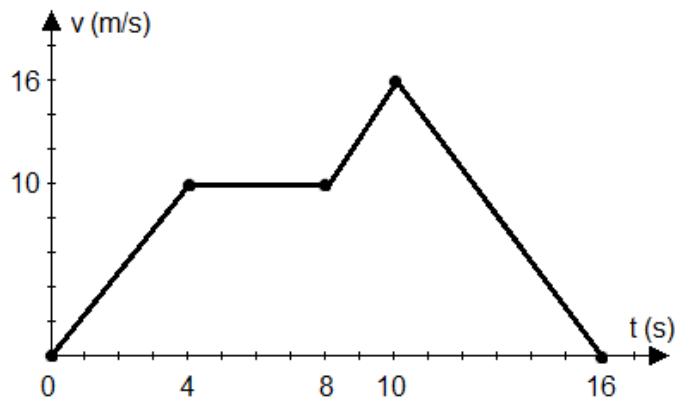
3.2.3 Exemplo de questão

Um exemplo de aplicação do uso desta ferramenta na Física Básica encontra-se na **Questão 9**.

Questão 9 – Formulação própria: Um móvel, partindo do repouso numa estrada retilínea, começa a se movimentar com aceleração constante até atingir a velocidade de 10 m/s em 4 segundos. Ele então mantém tal velocidade por mais 4 segundos, quando então acelera-se novamente de forma uniforme até atingir a velocidade de 16 m/s em 2 segundos de aceleração. Neste instante, ele inicia uma desaceleração uniforme por 6 segundos, quando então atinge o repouso, permanecendo enfim neste estado. Qual foi a distância percorrida pelo móvel ao fim de todo esse tempo?

Na **Questão 9**, pede-se “distância percorrida”, que nesse caso terá o mesmo valor que o deslocamento do móvel já que todo o movimento aconteceu num único sentido (a velocidade-

de nunca mudou de sentido no movimento descrito). Como já foi visto na Seção 2.4, pode-se calcular tal deslocamento utilizando-se a área do gráfico $v \times t$ do movimento, o que será facilitado nesse caso pelo Algoritmo de Gauss, visto que o enunciado permite que se encontre facilmente as coordenadas de todos os vértices do polígono que será formado pelo gráfico. Adiantemos que este cálculo será válido pois todos os movimentos ocorreram com velocidades uniformemente variadas ou constantes, de modo a formar um polígono simples. A figura a seguir mostra então o gráfico do movimento referente ao caso da **Questão 9**.



Procedemos então a montar a tabela com as coordenadas dos vértices, tomando o vértice (0, 0) como inicial e o restante no sentido horário, até que se chegue novamente ao vértice inicial. Montada a tabela, executa-se o cálculo de área de acordo com o Algoritmo de Gauss, de forma a encontrar a resposta de 134 metros:

0	0
4	10
8	10
10	16
16	0
0	0

0	0
4	10
8	10
10	16
16	0
0	0

-0×4 $+0 \times 10$
 -10×8 $+4 \times 10$
 -10×10 $+8 \times 16$
 -16×16 $+10 \times 0$
 -0×0 $+16 \times 0$

$$\text{área} = \frac{1}{2} \times | 40 + 128 - 80 - 100 - 256 |$$

$$\text{área} = \frac{1}{2} \times | -268 |$$

$\text{área} = 134$

3.3 Condição de alinhamento de pontos

3.3.1 Conceitos matemáticos

O Algoritmo de Gauss, visto na Seção anterior, embora seja uma ferramenta muito útil no cálculo de áreas, encontra aplicação bem restrita em problemas de Física Básica. Porém, uma de suas decorrências é extremamente interessante, que é a *condição de alinhamento de pontos*. Para que um número qualquer de pontos, pode-se afirmar que tais pontos só estarão alinhados se eles não formarem um polígono, ou seja:

Dados n pontos quaisquer, tais pontos estarão alinhados quando, aplicado o Algoritmo de Gauss, o cálculo retornar valor nulo.

No Algoritmo de Gauss, isto se passa como se uma reta fosse um polígono sem área, de forma que poderemos garantir que um resultado nulo no Algoritmo se refira a pontos alinhados. Assim, por exemplo, sabe-se que os pontos (1, 1), (2, 4) e (3, 7) estão alinhados, enquanto os pontos (0, 0), (1, 1) e (2, 4) não estão alinhados, conforme os cálculos abaixo:

$$S = \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times |4 + 14 + 3 - 2 - 12 - 7| = \frac{1}{2} \times |0| = 0 \quad \text{resultado nulo indica pontos alinhados}$$

$$S = \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times |0 + 4 + 0 - 0 - 2 - 0| = \frac{1}{2} \times |2| = 1 \quad \text{resultado não-nulo indica pontos não-alinhados}$$

Esta condição também nos permite encontrar rapidamente a uma equação de reta, quando se conhecem dois dos pontos dessa reta. Se queremos obter a equação da reta que passa por dois pontos quaisquer, pode-se entender que um terceiro ponto qualquer (x, y) deverá estar alinhado com os outros dois. Assim, aplicando o Algoritmo de Gauss aos dois pontos conhecidos em conjunto com um terceiro ponto genérico (x, y), e igualando-o a zero, encontra-se a equação da reta que passa por esses pontos. Ressalta-se que, como de qualquer forma o resultado do Algoritmo de Gauss para encontrar uma equação de reta deverá ser 0 (por impo-

sição), passa a ser desnecessário neste caso o uso do fator $\frac{1}{2}$ do algoritmo, já que o resultado obrigatoriamente nulo forçará que o termo de valor absoluto, que é multiplicado por esse fator $\frac{1}{2}$, seja nulo. Também podemos desprezar a própria necessidade de se tomar o valor absoluto dos termos calculados, já que o resultado é forçadamente nulo. Enfim, o uso do Algoritmo de Gauss para encontro de equação de reta fica simplificado: basta dispor os pontos (os dois conhecidos e o genérico) na forma tabular, realizar as multiplicações, somas e subtrações características do algoritmo e igualar tudo isso a zero, sem a necessidade do fato $\frac{1}{2}$ e da tomada de valor absoluto.

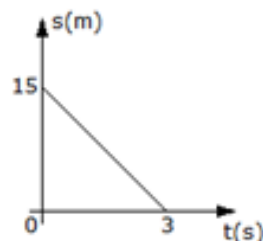
3.3.2 Aplicações na Física

O uso desta ferramenta que permite obter-se a condição de alinhamento de pontos, na Física, é útil em vários casos. Podemos citar a obtenção de equações de reta; a obtenção de funções do 1º grau quando pares ordenados particulares são conhecidos; avaliar se (ou quando) corpos estarão numa mesma direção etc.

3.3.3 Exemplos de questões

Vejamos como primeiro exemplo a **Questão 10**, que embora seja simples em sua natureza, mostra como se pode usar a condição de alinhamento de pontos para obtenção de equações de reta com facilidade, devido à sua forma simplificada que foi explicada ao final do item 3.3.1:

Questão 10 – Vestibular AFA: Um corpo tem seu movimento representado pelo gráfico abaixo, onde s é sua posição e t o tempo. A equação horária que representa esse movimento é



- a) $s = 12 - 3t$ b) $s = 15 + 3t$ c) $s = 15 - 3t$ d) $s = 15 - 5t$

A **Questão 10** é facilmente resolvida encontrando-se a equação da reta (s, t) que passa pelos pontos $(0, 15)$ e $(3, 0)$. Podemos encontrar essa equação rapidamente utilizando a condição de alinhamento de pontos explicada nesta seção:

$$\begin{vmatrix} 0 & 15 \\ 3 & 0 \\ t & s \\ 0 & 15 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad 0 + 3s + 15t - 45 - 0 - 0 = 0$$

$$3s = 45 - 15t$$

$$\boxed{s = 15 - 5t}$$

Outras questões mais interessantes também podem ser resolvidas com o auxílio dessa ferramenta de obtenção de condição de alinhamento. Um exemplo disto é a **Questão 11**:

Questão 11 – Formulação própria: Um raio luminoso deve iluminar um objeto pontual **O** através de um espelho **E** (ambos apoiados no solo **S**). Um anteparo opaco **A** impede a princípio que a iluminação seja feita de forma direta, conforme a Figura 1, mas sua posição inicial permite a iluminação por reflexão no espelho. O raio será gerado por uma fonte pontual **F** fixa na posição indicada, que pode gerar o raio em qualquer direção no plano da figura.

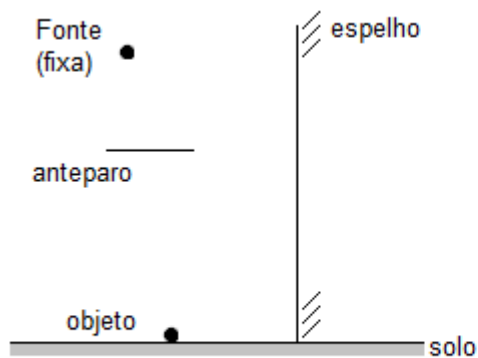


Figura 1

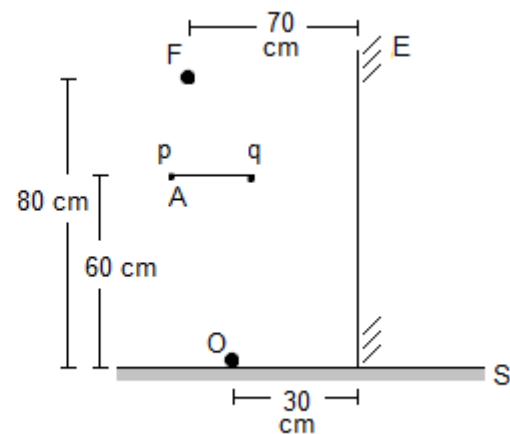
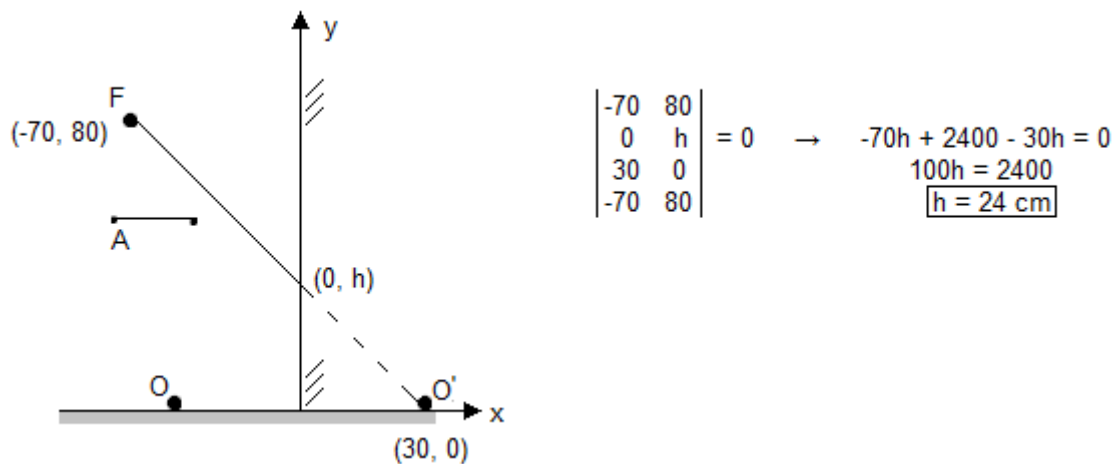


Figura 2

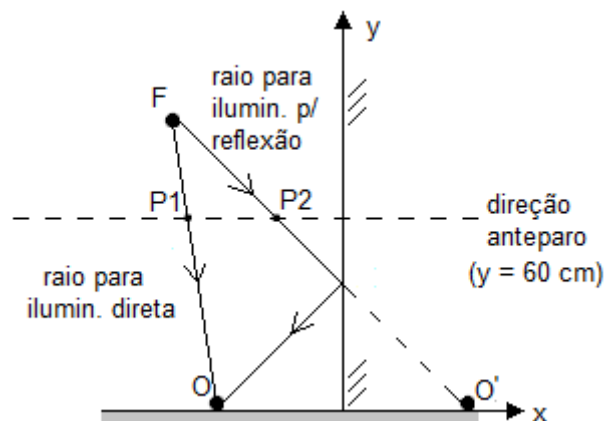
- Usando os dados esquematizados na Figura 2, calcule a que altura no espelho o raio luminoso oriundo da fonte deverá atingir, a fim de que o objeto seja iluminado.
- Admita agora que o anteparo tenha 20 cm de extensão e pode se movimentar livremente na horizontal, mantendo constante sua altura. Quais as distâncias da extremidade direita do anteparo (ponto **q** na Figura 2) até o espelho que permitem a iluminação do objeto pela fonte de forma direta, quais permitem iluminação por reflexão e quais não permitem iluminação

alguma?

Para a resolução da letra (a) da **Questão 11**, pode-se fixar um plano cartesiano cuja origem coincide com o ponto de apoio do espelho no solo, estando o eixo x sobre o solo e o eixo y sobre o espelho, conforme a figura a seguir. Como os espelhos planos obedecem ao princípio da reflexão simétrica, a altura pedida na questão será o ponto “h” sobre o eixo y que pertence à direção da reta formada pela fonte e a imagem O’ do objeto em relação ao espelho. Assim, basta aplicar a condição de alinhamento vista nesta seção para que se encontre o ponto h.



Para a resolução da letra (b), observamos primeiramente que, de forma genérica, para anteparos em diferentes posições existem algumas possibilidades: o objeto poder ser iluminado tanto de forma direta quanto por reflexão; ou somente de um único modo; ou de nenhum modo. A fim de se explorar melhor essas possibilidades, vejamos a figura abaixo:

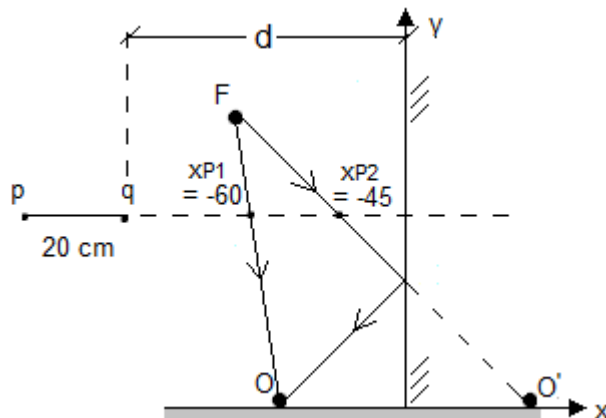


Para que seja possível iluminação direta, o ponto P1 não pode estar bloqueado pelo anteparo. Para que seja possível iluminação por reflexão, o ponto P2 não pode estar bloqueado pelo anteparo. Desta forma, é conveniente encontrarmos quais pontos são esses, para que então possamos avaliar as posições do anteparo que permitem iluminação do objeto. Tanto P1 quanto P2 podem ser facilmente encontrados pelo uso da condição de alinhamento de pontos (lembrando que eles possuem altura 60 cm):

$$\begin{array}{l} \text{P1 está alinhado com F (-70, 80) e O (-30, 0):} \\ \begin{vmatrix} -70 & 80 \\ -30 & 0 \\ x_{P1} & 60 \\ -70 & 80 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -1800 + 80x_{P1} + 2400 + 4200 = 0 \\ \phantom{\begin{vmatrix} -70 & 80 \\ -30 & 0 \\ x_{P1} & 60 \\ -70 & 80 \end{vmatrix} = 0} \phantom{-1800 + 80x_{P1} + 2400 + 4200 = 0} 80x_{P1} = -4800 \\ \phantom{\begin{vmatrix} -70 & 80 \\ -30 & 0 \\ x_{P1} & 60 \\ -70 & 80 \end{vmatrix} = 0} \phantom{-1800 + 80x_{P1} + 2400 + 4200 = 0} x_{P1} = -60 \text{ cm} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{P2 está alinhado com F (-70, 80) e O' (30, 0):} \\ \begin{vmatrix} -70 & 80 \\ 30 & 0 \\ x_{P2} & 60 \\ -70 & 80 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 1800 + 80x_{P2} - 2400 + 4200 = 0 \\ \phantom{\begin{vmatrix} -70 & 80 \\ 30 & 0 \\ x_{P2} & 60 \\ -70 & 80 \end{vmatrix} = 0} \phantom{1800 + 80x_{P2} - 2400 + 4200 = 0} 80x_{P2} = -3600 \\ \phantom{\begin{vmatrix} -70 & 80 \\ 30 & 0 \\ x_{P2} & 60 \\ -70 & 80 \end{vmatrix} = 0} \phantom{1800 + 80x_{P2} - 2400 + 4200 = 0} x_{P2} = -45 \text{ cm} \end{array}$$

A figura abaixo mostra os pontos P₁ e P₂, com suas respectivas abscissas, e o anteparo móvel. O item (b) da **Questão 11** pergunta quais são as distâncias do ponto q até o espelho que permitem iluminação do objeto O, seja por incidência direta, seja por reflexão no espelho. Lembrando que o tamanho do anteparo é de 20 cm e que a distância de P₁ até P₂ é de 15 cm, a análise da figura abaixo nos permite então concluir que, se o anteparo pode se mover (mantendo sua altura fixa de frente à parte refletora do espelho):



- Para uma distância de q ao espelho superior a 60 cm ($d > 60$ cm), o objeto pode ser iluminado tanto de forma direta quanto por reflexão, pois nem P_1 nem P_2 estarão bloqueados pelo anteparo;

- Para uma distância de q até o espelho que esteja entre 60 cm (inclusive) e 45 cm (exclusive) ($60 \text{ cm} \geq d > 45 \text{ cm}$), o objeto só poderá ser iluminado por reflexão, pois o ponto P_1 estará bloqueado pelo anteparo, mas não P_2 ;

- Para uma distância de q até o espelho que esteja entre 45 cm (inclusive) e 40 cm (inclusive) ($45 \text{ cm} \geq d \geq 40 \text{ cm}$), o objeto não poderá ser iluminado de nenhuma forma, pois ambos os pontos P_1 e P_2 estarão bloqueados pelo anteparo;

- Para uma distância de q até o espelho que esteja entre 40 cm (exclusive) e 25 cm (inclusive) ($40 \text{ cm} > d \geq 25 \text{ cm}$), o objeto só poderá ser iluminado de forma direta, pois o ponto P_2 estará bloqueado pelo anteparo, mas não P_1 .

- Para uma distância de q ao espelho inferior a 25 cm ($d < 25$ cm), o objeto pode ser iluminado tanto de forma direta quanto por reflexão, pois nem P_1 nem P_2 estarão bloqueados pelo anteparo.

3.4 Análise cilíndrica

3.4.1 Análise voltada às aplicações na Física

Na matemática do Ensino Superior, costuma-se estudar diferentes tipos de coordenadas (como as coordenadas cilíndricas e as esféricas) em disciplinas de Geometria Analítica e/ou Cálculo. Alguns conceitos básicos desses sistemas de coordenadas podem ser úteis no Ensino Médio, sobretudo na resolução de problemas de Física Básica que possuem alguma simetria condizente com esses tipos de coordenadas.

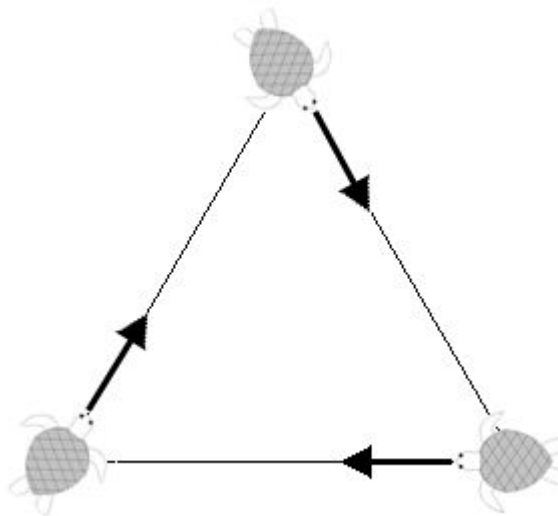
Especificamente, as coordenadas cilíndricas podem ser de grande ajuda em questões que envolvem algum tipo de rotação, visto que é muito mais simples, nesses casos, trabalhar-se com esse tipo de coordenadas do que com as coordenadas retangulares (que são geralmente o único tipo de coordenadas que alunos do Ensino Médio conhecem).

Não é, contudo, necessário que o aluno saiba de fato a teoria de coordenadas cilíndricas em todo seu rigor, como as notações (r, φ, z) e as transformações de coordenadas de um tipo de sistema para outro. O simples entendimento de que um problema pode ser melhor entendido se analisarmos os eixos radial e tangencial (característicos de um sistema cilíndrico) do que se analisarmos os eixos x e y convencionais, já é o suficiente numa vasta gama de problemas desafiadores que envolvem rotação na Física do Ensino Médio.

3.4.2 Exemplos de questões

Vamos começar a análise dessa ferramenta com a **Questão 12**:

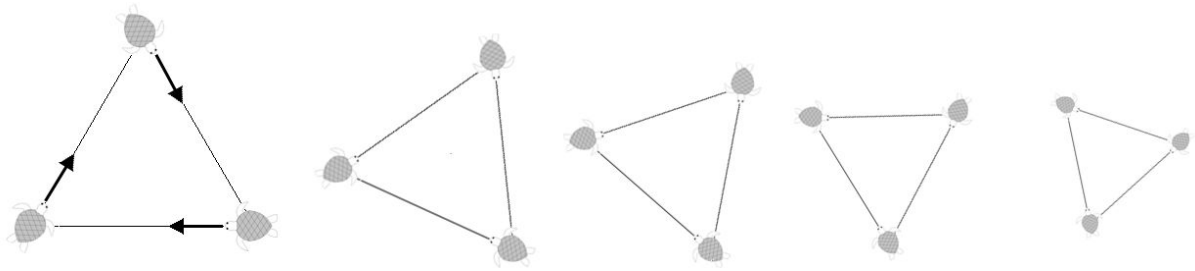
Questão 12 - SARAIEVA *et al* (1985); BRITO (2011): Três tartarugas encontram-se nos vértices de um triângulo equilátero de lado L . Simultaneamente, elas começam a se movimentar com uma velocidade de módulo constante V , sendo que a primeira sempre se dirige em direção à segunda, a segunda sempre em direção à terceira e a terceira sempre em direção à primeira, conforme a figura:



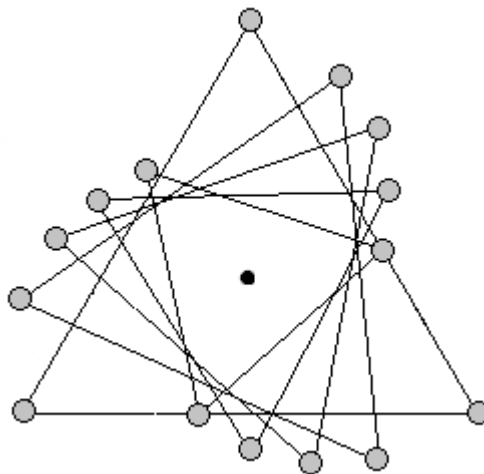
- Após quanto tempo as tartarugas vão se encontrar?
- Qual a distância percorrida por uma tartaruga qualquer nesse episódio?

A **Questão 12** apresenta várias dificuldades para os alunos que estão vendo este tipo de problema pela primeira vez. A primeira dificuldade é visualizar como as tartarugas irão se deslocar, e qual será a forma da trajetória delas. Porém, com um pouco de reflexão, os alunos

costumam entender, corretamente, que as tartarugas possuem um misto de movimento giratório com aproximação, já que elas sempre se movimentam no sentido de se aproximarem. Tudo ocorre como se o triângulo equilátero da figura, que possui as tartarugas em seus vértices, fosse girando e se encolhendo simultaneamente, em direção ao centro do triângulo, conforme a sequência de figuras abaixo (onde também diminuimos a tartaruga para melhor visualização do encolhimento):

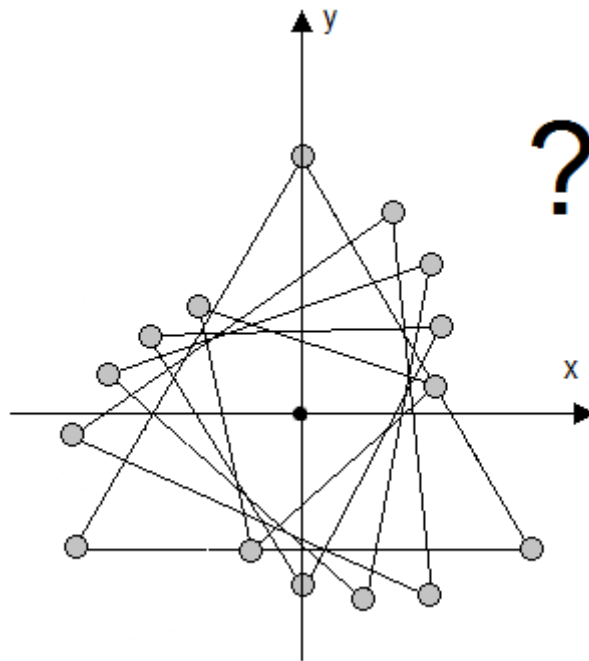


Superpondo-se essas figuras, fica mais fácil de se visualizar a trajetória descrita por cada tartaruga, conforme a próxima figura, na qual nota-se uma clara tendência de encontro das tartarugas no centro do triângulo:

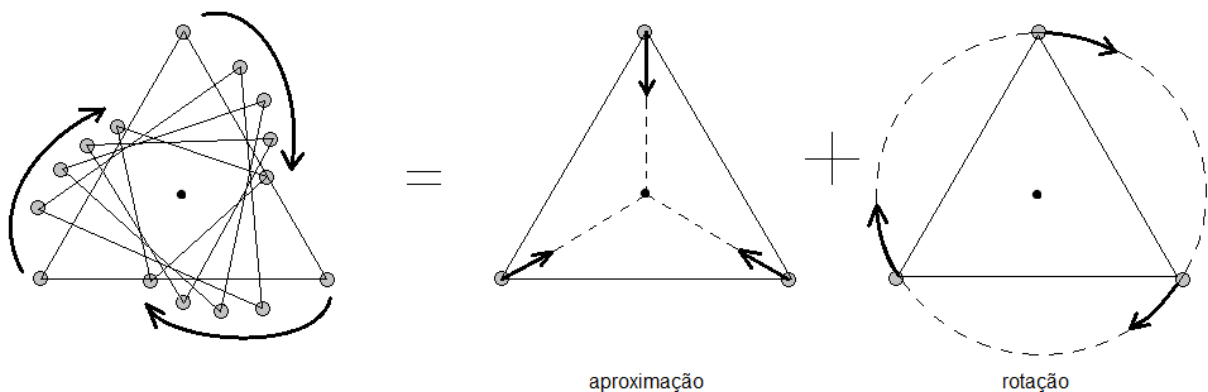


Entendidos como é o movimento das tartarugas e as formas das trajetórias, os alunos esbarram numa próxima dificuldade: como calcular o tempo de encontro? Como calcular o comprimento da trajetória para se avaliar a distância percorrida, se a forma da trajetória é uma curva de difícil avaliação?

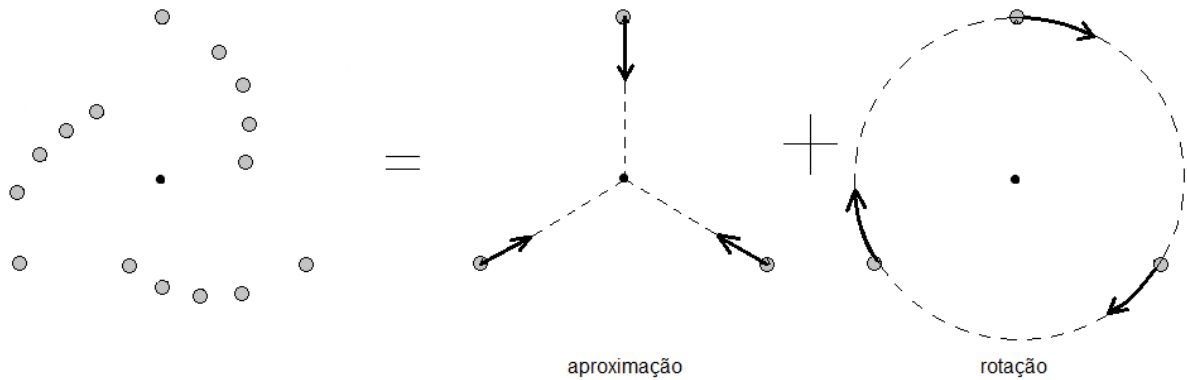
Tais dúvidas surgem naturalmente pois o aluno de Ensino Médio está condicionado a analisar problemas com um pensamento em coordenadas cartesianas retangulares. Por exemplo, o aluno de Ensino Médio acostumou a resolver problemas de Lançamento Oblíquo decompondo o movimento em dois eixos, x e y , sendo que cada um desses eixos possui, projetado em si, um tipo de movimento conhecido (MU no eixo x e MUV no eixo y). Mas no caso do problema das tartarugas, a tentativa da análise em coordenadas retangulares x e y praticamente impossibilita o andamento da resolução.



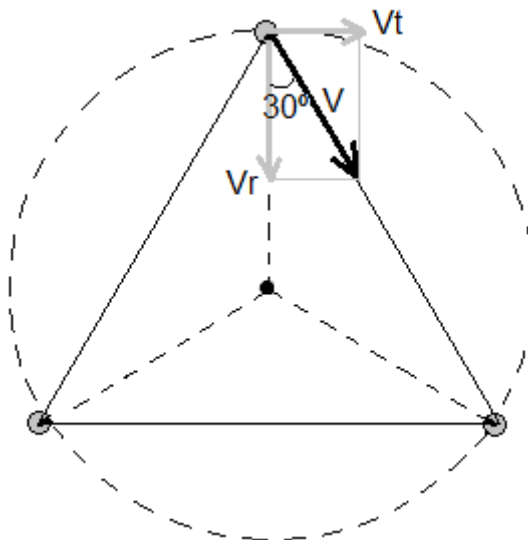
É aí que entra a análise por coordenadas cilíndricas. O aluno, que geralmente já entendeu perfeitamente que há um misto de rotação com aproximação, é convidado a fazer um paralelo: se no movimento oblíquo podemos decompor o movimento em horizontal e vertical, tentemos decompor o movimento das tartarugas em rotação e aproximação:



Também podemos refazer as figuras suprimindo os triângulos, para melhor visualização:



Identificados os movimentos superpostos, podemos decompor os vetores velocidade V de cada tartaruga de forma conveniente, a concordar com os movimentos da superposição. Se cada vetor velocidade V é responsável por uma aproximação e uma rotação, V deverá ter uma componente V_r *radial* (responsável pela *aproximação*) e uma componente V_t *tangencial* (responsável pela *rotação*). Cada tartaruga sempre aponta o vetor V para a vizinha sobre os lados do triângulo, de modo então que as componentes V_r e V_t formam, com o vetor V , um triângulo retângulo com um ângulo de 30° entre V_r e V , conforme a figura:



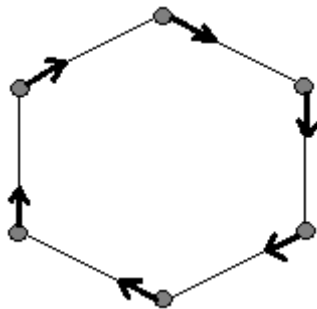
Portanto, temos $V_r = V \cos 30^\circ$, e $V_t = V \sin 30^\circ$. Vamos agora responder aos itens do problema:

a) para se encontrar o tempo até o encontro, basta perceber que, na direção radial, cada tartaruga irá percorrer uma distância igual a $L\sqrt{3}/3$ (distância do centro de um triângulo equilátero até um de seus vértices) com velocidade de módulo constante $V_r = V\cos 30^\circ = V\sqrt{3}/2$. Assim, o tempo será a razão da distância pela velocidade: $t = (L\sqrt{3}/3)/(V\sqrt{3}/2) = 2L/3V$.

b) para encontrar o comprimento da trajetória curvilínea descrita por cada tartaruga, basta lembrar que tal trajetória é percorrida com velocidade de módulo constante V , no tempo total calculado no item (a). Portanto, tal distância será o produto da velocidade pelo tempo: $d = 2L/3$.

Problema semelhante caiu no vestibular do ITA de 2011, conforme podemos ver na **Questão 13**:

Questão 13 – ITA (2011): Um problema clássico da cinemática considera objetos que, a partir de certo instante, se movem conjuntamente com velocidade de módulo constante a partir dos vértices de um polígono regular, cada qual apontando à posição instantânea do objeto vizinho em movimento. A figura mostra a configuração desse movimento múltiplo no caso de um hexágono regular. Considere que o hexágono tinha 10,0 m de lado no instante inicial e que os objetos se movimentam com velocidade de módulo constante de 2,00 m/s. Após quanto tempo estes se encontrarão e qual deverá ser a distância percorrida por cada um dos seis objetos?

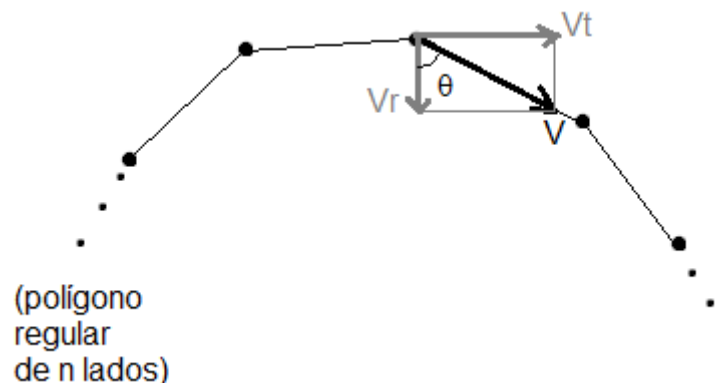


Um raciocínio exatamente análogo ao da **Questão 12**, mas aplicando a decomposição velocidade num ângulo de 60° devido ao fato de nesse caso ser um hexágono, nos leva às respostas de 10 s e 20 m.

Podemos ainda generalizar esse tipo de problemas para qualquer polígono regular, o que configura num problema bem desafiador, conforme a **Questão 14**:

Questão 14 – Formulação própria: Um polígono regular de n lados possui, em seus vértices, objetos que de repente começam a se mover conjuntamente, com velocidade de módulo constante, cada qual apontando à posição instantânea do objeto vizinho em movimento. Considere que o polígono tenha lado inicial de comprimento L , e que os objetos se movimentam com velocidade de módulo constante V . Após quanto tempo estes se encontrarão e qual deverá ser a distância percorrida por cada um dos n objetos?

Inspirados pelas questões 12 e 13, somos levados a decompor a velocidade V em duas componentes: a radial V_r (de módulo $V \cdot \cos\theta$) e a tangencial V_t (de módulo vale $V \cdot \sin\theta$).

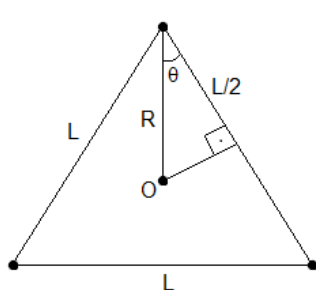


O valor do ângulo θ pode ser encontrado com conhecimentos básicos de Geometria Plana:

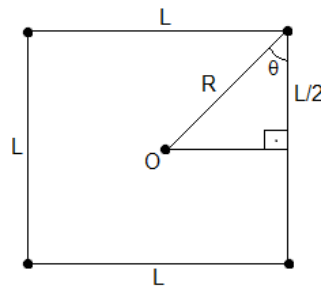
- o valor do ângulo interno de um polígono regular de n lados é dado pela fórmula $\alpha = (n-2) \cdot 180^\circ/n$;
- o ângulo θ da figura acima é a bissetriz do ângulo interno de um polígono de n lados;
- portanto, $\theta = (n-2) \cdot 180^\circ/2n$.

Portanto, temos $V_r = V \cos[(n-2) \cdot 180^\circ / 2n]$, e $V_t = V \sin[(n-2) \cdot 180^\circ / 2n]$. Vamos agora responder aos itens do problema:

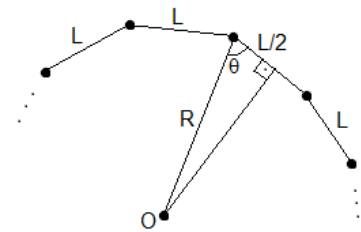
- *Tempo de encontro*: para se encontrar o tempo até o encontro, primeiro devemos obter a distância radial que separa um vértice qualquer do centro O do polígono regular de n lados. Para isto, observamos que essa distância (chamaremos de R , pois coincide com o raio da circunferência circunscrita ao polígono) é obtida por meio do uso de um triângulo retângulo, cuja hipotenusa vale R e cujo lado adjacente ao ângulo θ vale $L/2$. Na figura abaixo, mostramos esse procedimento para dois casos particulares (triângulo e quadrado), e depois para o caso geral do polígono regular de n lados:



polígono regular 3 lados
(triângulo)



polígono regular 4 lados
(quadrado)



polígono regular n lados
(n -ângono)

Do triângulo retângulo, observamos que $\cos\theta = L/2R$, e logo $R = L/2\cos\theta$ (sendo que o ângulo θ já foi calculado previamente ainda nesta questão: $\theta = (n-2) \cdot 180^\circ / 2n$). Portanto, cada tartaruga irá percorrer uma distância igual a $R = L/2\cos\theta = L/2\cos[(n-2) \cdot 180^\circ / 2n]$, com velocidade de módulo constante $V_r = V \cos\theta = V \cos[(n-2) \cdot 180^\circ / 2n]$. Assim, o tempo será a razão da distância pela velocidade: $t = L/2V \cos^2[(n-2) \cdot 180^\circ / 2n]$.

- *Distância percorrida*: para encontrar o comprimento da trajetória curvilínea descrita por cada tartaruga, basta lembrar que tal trajetória é percorrida com velocidade de módulo constante V , no tempo total calculado logo acima. Portanto, tal distância será o produto da velocidade pelo tempo: $d = L/2 \cos^2[(n-2) \cdot 180^\circ / 2n]$.

Neste ponto, e se os alunos já tiverem tido contato com outras questões que são casos particulares da **Questão 14** (como a **Questão 12** e a **Questão 13**), é interessante fazê-los observar que as respostas desta questão devem coincidir com as dos casos particulares, caso os dados particulares sejam nelas inseridos. Assim:

- Aplicando os dados da **Questão 12** (triângulo $n = 3$, lado L , velocidade V): tempo $t = L/2V\cos^2[(3-2).180^\circ/2.3] = L/2V\cos^2[30^\circ] = 2L/3V$; distância percorrida $d = L/2\cos^2[(3-2).180^\circ/2.3] = L/2\cos^2[30^\circ] = 2L/3$. Ambas as respostas (tempo e distância) concordaram.

- Aplicando os dados da **Questão 13** (hexágono $n = 6$, lado 10 m, velocidade 2 m/s): tempo $t = 10/2.2.\cos^2[(6-2).180^\circ/2.6] = 10/4\cos^2[60^\circ] = 10$ s; distância percorrida $d = 10/2.\cos^2[(6-2).180^\circ/2.6] = 10/2\cos^2[60^\circ] = 20$ m. Ambas as respostas (tempo e distância) concordaram.

4 Outros problemas

Inspiração é necessária em Geometria, tanto quanto em poesia.

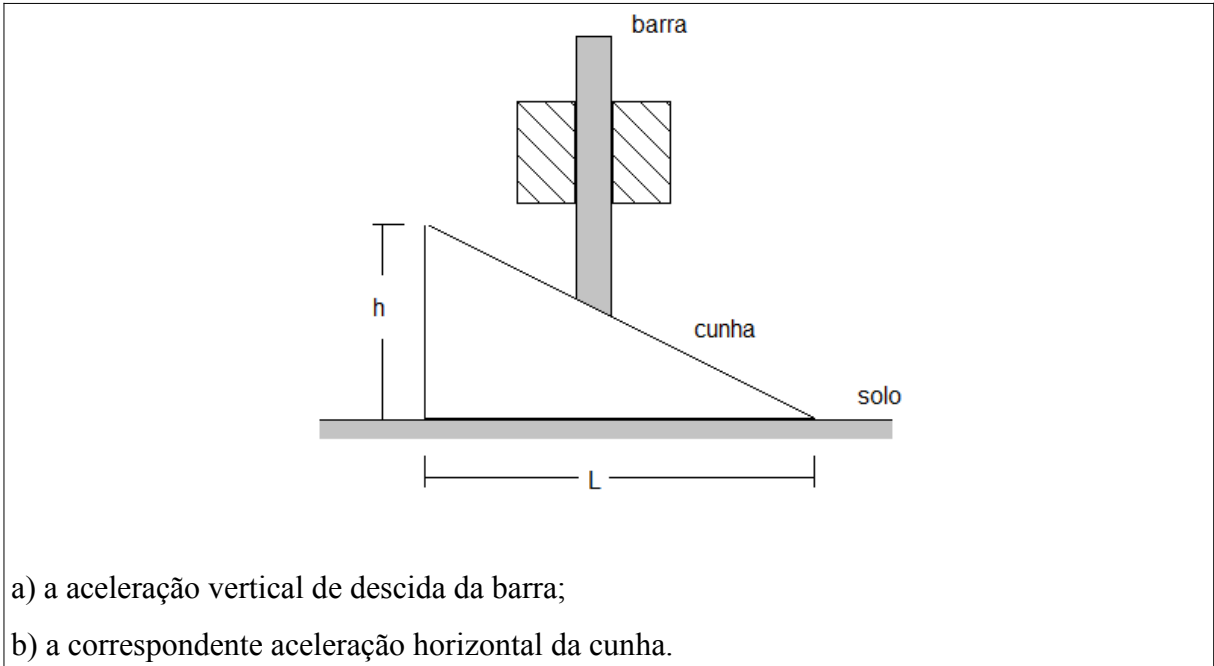
Alexander Pushkin

4.1 Introdução

Nesta seção, serão apresentados alguns outros problemas interessantes de Física do Ensino Médio, que possuem resoluções contendo recursos geométricos.

4.2 Problemas

Questão 15 – SARAIEVA *et al* (1985); BRITO (2011): Na figura abaixo, uma barra de massa 1 kg (mantida sempre na vertical por anteparos fixos) encontra-se apoiada sobre uma cunha de massa 4 kg e dimensões $h = 60$ cm e comprimento $L = 30$ cm. A cunha é livre para se mover sobre um solo horizontal. Se a gravidade local vale $g = 10$ m/s² e todos os atritos são desprezíveis, determine:

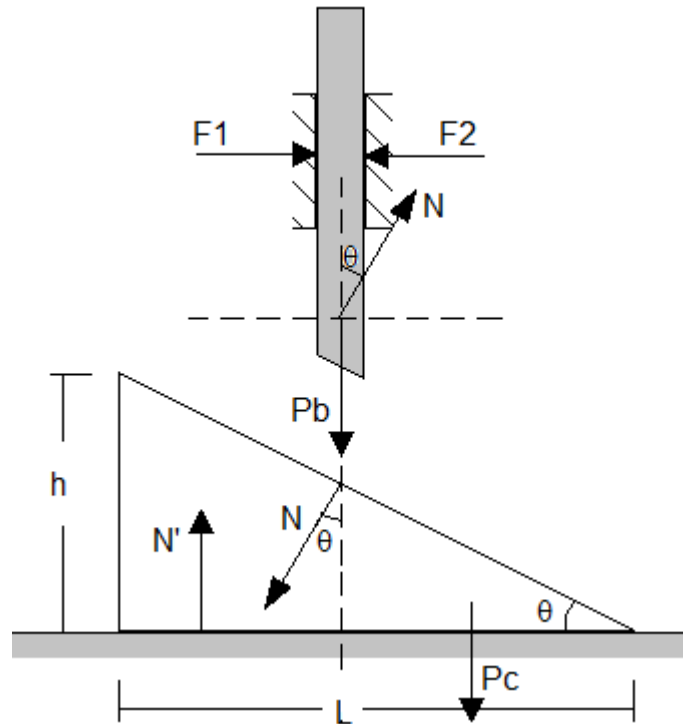


Na **Questão 15**, tem-se dois corpos se movimentando: a barra e a cunha. As forças que atuam em cada um desses corpos são:

- na barra: força peso (módulo P_b); normal de contato com a cunha (módulo N); normais de contato com os anteparos (módulos F_1 e F_2).

- na cunha: peso (módulo P_c); normal de contato com a barra (módulo N); normal de contato com o solo (módulo N').

A figura abaixo nos ajuda a entender as direções e módulos das forças envolvidas. Denominamos de θ o ângulo de inclinação da cunha, e por conceitos básicos de geometria também podemos dizer que θ é o ângulo que a normal de módulo N faz com a vertical:



Como a barra desce acelerada (estando restrita à vertical), suas componentes de forças horizontais se anulam. Portanto, sua força resultante F_b terá módulo dado pela diferença de P_b com a componente vertical de N que lhe atuam:

$$F_b = P_b - N \cos \theta \quad (\text{equação 1})$$

Como a cunha se move para a esquerda de forma acelerada (estando restrita à horizontal), suas componentes de forças verticais se anulam. Portanto, sua força resultante F_c terá módulo dado pela componente horizontal de N :

$$F_c = N \sin \theta \quad (\text{equação 2})$$

As equações 1 e 2, desenvolvidas, tomam o seguinte aspecto:

$$m_b \cdot a_b = m_b \cdot g - N \cos \theta$$

$$m_c \cdot a_c = N \sin \theta$$

As massas e a gravidade são conhecidas ($m_b = 1 \text{ kg}$, $m_c = 4 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$). Também podemos encontrar as funções trigonométricas do ângulo θ porque os lados do triângulo foram

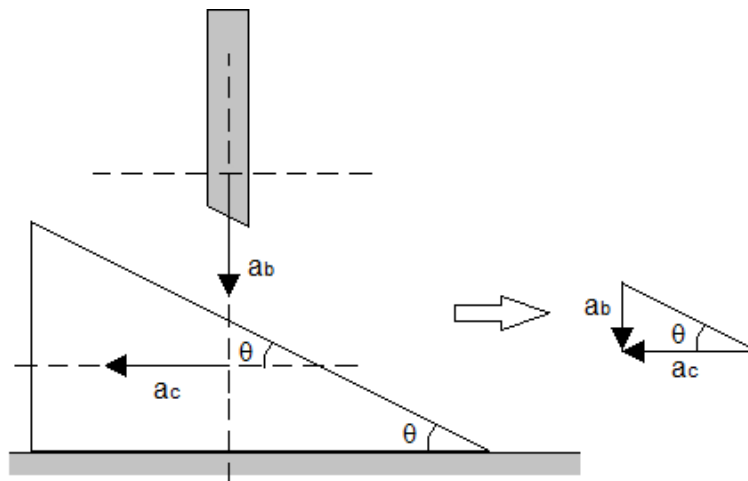
fornecidos (resultando em $\operatorname{tg}\theta = 2$; $\operatorname{sen}\theta = 0,9$; $\operatorname{cos}\theta = 0,45$). Aplicando tais valores às equações acima, obtemos:

$$a_b = 10 - 0,45.N$$

$$4a_c = 0,9.N$$

Reparamos que o uso das Leis da Mecânica resultaram num sistema de duas equações com 3 incógnitas, sendo portanto inviável sua resolução somente com essas equações.

Deve-se encontrar portanto uma terceira equação que envolva essas mesmas incógnitas. Tal equação surgirá do vínculo geométrico existente entre as duas acelerações da barra e da cunha. Isto porque, se a barra está restrita à vertical, a cunha restrita à horizontal, e ambos estão sempre em contato com a superfície de ângulo θ , as acelerações da barra e da cunha pertencerão a um triângulo retângulo com um dos ângulos sendo θ . Vendo isso de uma outra maneira: a cada metro que a barra descer, a cunha andarà para esquerda uma quantidade de metros que forma um lado de um triângulo, com altura 1 m (da descida da barra), com ângulo θ oposto a esse 1 m:



Do triângulo formado, podemos afirmar que $\operatorname{tg}\theta = a_b/a_c$, ou ainda:

$$a_b = a_c \cdot \operatorname{tg}\theta$$

O que faz muito sentido, pois, quanto maior a inclinação θ da figura, maior a tendência da barra descer, e menos da cunha se movimentar horizontalmente, o que indica o vínculo geométrico existente entre esses corpos.

De qualquer forma, substituindo o valor da tangente de θ na equação, formamos com as outras duas equações que já tínhamos o seguinte sistema:

$$a_b = 10 - 0,45.N$$

$$4a_c = 0,9.N$$

$$a_b = 2.a_c$$

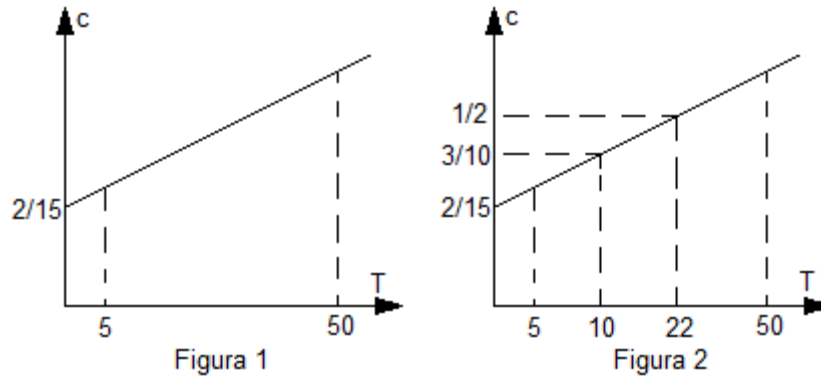
Resolvendo este sistema, obtemos as acelerações pedidas: $a_b = 5 \text{ m/s}^2$; $a_c = 2,5 \text{ m/s}^2$.

Questão 16 - (AFA – 2006): Para intervalos de temperaturas entre $5 \text{ }^\circ\text{C}$ e $50 \text{ }^\circ\text{C}$, o calor específico (c) de uma determinada substância varia com a temperatura (t) de acordo com a equação $c = t/60 + 2/15$, onde c é dado em $\text{cal/g}\cdot^\circ\text{C}$ e t em $^\circ\text{C}$. A quantidade de calor necessária para aquecer 60 g desta substância de $10 \text{ }^\circ\text{C}$ até $22 \text{ }^\circ\text{C}$ é

a) 350 cal b) 120 cal c) 480 cal d) 288 cal

Na **Questão 16**, deseja-se obter uma quantidade de calor sensível, sendo dadas a massa $m = 60 \text{ g}$ e a variação de temperatura $\Delta T = 22 - 10 = 12 \text{ }^\circ\text{C}$ do corpo. Nesse tipo de problema, os alunos de Ensino Médio estão normalmente acostumados a usar calores específicos constantes, para aplicar na fórmula $Q = mc\Delta T$. Porém, neste problema, o calor específico é variável com a temperatura, de acordo com a função $c = t/60 + 2/15$. Neste caso, o fato do calor específico variar gera dúvidas.

Talvez a melhor forma de começarmos uma análise disto no Ensino Médio é com alguma informação visual. Vamos plotar o gráfico calor específico em função do tempo dessa substância, já que nos foi dada a função que relaciona essas variáveis. Sendo uma função do 1° grau, seu gráfico é representado por uma reta, com abscissas limitadas aos valores de 5 e $50 \text{ }^\circ\text{C}$, conforme a Figura 1 abaixo:



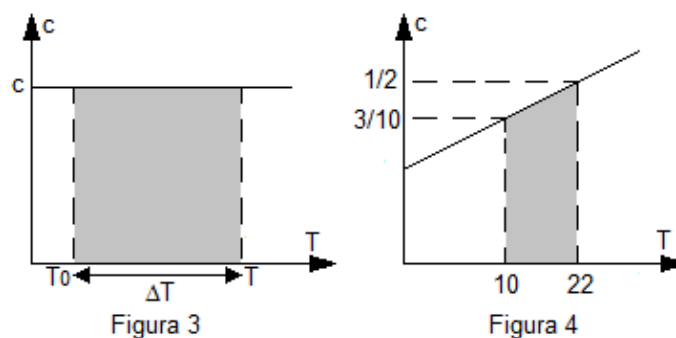
Podemos incluir nesse gráfico os valores inicial e final de “c” no aquecimento dado, ou seja, os valores de “c” para as temperaturas de 10 e 22 °C. Esses valores podem ser obtidos simplesmente utilizando-se a função $c \times T$ dada:

$$c(10) = 10/60 + 2/15 = 3/10$$

$$c(22) = 22/60 + 2/15 = 1/2$$

E assim, formamos o gráfico mais completo dado pela Figura 2 acima. Agora, podemos compreender melhor o problema.

Vamos analisar a conhecida fórmula $Q = mc\Delta T$ que usamos quando “c” é constante. Observe que, se dividimos essa equação por “m”, obtemos $Q/m = c\Delta T$ quando “c” é constante. O que significa o produto $c\Delta T$ para “c” constante? Observe a Figura 3 abaixo:



Essa Figura 3 representa o gráfico de uma função constante, com o valor de “c” mantendo-se invariante ao longo da variação de temperatura. O produto $c\Delta T$ representa, portanto, a área sob o gráfico $c \times T$ entre as temperaturas inicial e final. Então podemos afirmar, base-

ando-nos na equação $Q/m = c\Delta T$, que podemos encontrar o valor Q/m numa troca de calor simplesmente calculando a área sob o gráfico $c \times T$, quando esse calor específico “ c ” é constante ao longo da variação de temperatura. Mas isso leva a uma segunda questão: *e se o calor específico for variável com a temperatura, como é o caso desta questão?*

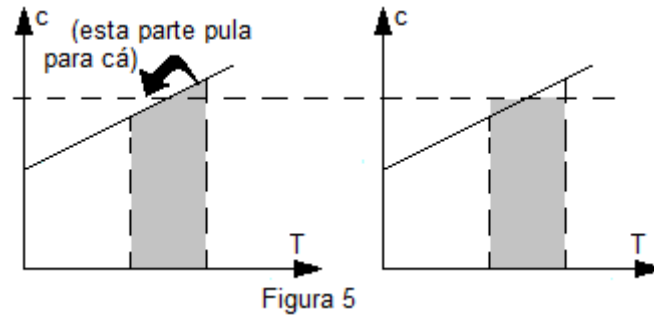
A resposta a essa pergunta é: não importa que ele varie! O valor Q/m de *qualquer* troca de calor pode ser encontrado analisando-se a área sob o gráfico $c \times T$, mesmo que o valor de “ c ” seja variável com a temperatura. Essa propriedade é, na verdade, advinda do cálculo integral, no qual não entraremos em muitos detalhes. O que nos interessa aqui é que, para resolver esta questão, vamos simplesmente calcular a área sob o gráfico mostrado na Figura 4, que representa a troca de calor do problema (repare que a Figura 4 é uma pequena modificação da Figura 2), e igualar essa área a Q/m .

A área sob o gráfico na Figura 4 representa um trapézio, cuja área é dada, então, por:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{(\text{base maior} + \text{base menor}) \cdot (\text{altura})}{2} \\ \text{Área} &= \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\right) \cdot (22 - 10)}{2} = \frac{48}{10} \\ \frac{Q}{m} &= \frac{48}{10} \Rightarrow Q = \frac{48}{10} \cdot 60 = 288 \text{ cal} \end{aligned}$$

E assim, pode-se enunciar uma propriedade: “a razão entre o calor trocado por um corpo e sua massa (ou seja, Q/m) é igual à área sob o gráfico $c \times T$ desse corpo, onde essa área é limitada pelas temperaturas inicial e final.”

Uma outra forma de se resolver esse problema, cujo fundamento é decorrente das propriedades geométricas acima, é a seguinte: veja que no gráfico dado pela figura 4, se “partirmos” a parte inclinada ao meio e redistribuirmos essa parte, conseguiremos formar um retângulo, conforme mostra a Figura 5:



Conseguimos, portanto, formar um retângulo com a mesma área do trapézio, e esse retângulo possui altura dada pela média das bases maior e menor desse trapézio. Em outras palavras: conseguimos uma “função constante equivalente” do calor específico “c”, com mesma área do trapézio da função variável do problema. Essa função constante possui o valor de “c” que é a média entre os valores extremos da função variável, que eram $\frac{3}{10}$ e $\frac{1}{2}$, ou seja:

$$c = \frac{\frac{3}{10} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{2}{5}$$

Esse valor médio de “c”, que é constante, está associado a uma troca de calor cujo efeito total entre as temperaturas 10 e 22 °C é o mesmo da troca de calor com o “c” variável da função dada no problema. Portanto, poderemos usar a equação $Q = mc\Delta T$ com esse valor de “c”, pois o calor Q nesse caso será o mesmo solicitado do problema (já que as áreas do trapézio e do retângulo equivalente são iguais). Assim:

$$Q = mc\Delta T = 60 \cdot \frac{2}{5} \cdot (22 - 10) = 288 \text{ cal}$$

Estas conclusões geométricas permitem a obtenção de uma outra propriedade: “quando o calor específico de uma substância variar *linearmente* (ou seja, uma função do 1º grau) com a temperatura, o calor trocado por essa substância entre as temperaturas T_0 e T equivale ao calor trocado por uma substância que teria o calor específico dado pela média entre os valores de $c(T_0)$ e $c(T)$, entre as mesmas temperaturas extremas”.

5 Relatório de aplicações durante o Estágio Supervisionado

A prova de todo conhecimento é a experimentação.

Richard P. Feynman

5.1 Introdução e comentários gerais

Durante a disciplina de Estágio, foi possível analisar quais seriam os resultados da aplicação de algumas questões desafiadoras de física do Ensino Médio a diferentes turmas e alunos, e quais seriam os caminhos tomados pelos alunos nestas questões antes e depois de eles terem contato com algumas das ferramentas geométricas descritas neste trabalho (e incentivados a utilizarem-nas).

Tais inserções foram feitas nas ocasiões em que o autor desta monografia ministrou aulas durante a disciplina de Estágio Supervisionado II, sendo que ele mesmo iria aplicar as questões desafiadoras, ensinar ou revisar ferramentas geométricas interessantes concernentes a essas questões, e interrogar a turma sobre suas impressões sobre as soluções geométricas, em contraste com as soluções algébricas, tendo tudo isto sido combinado com o professor da turma.

No geral, o que se observou foi:

- quando as questões eram apresentadas sem qualquer tipo de explicação sobre ferramentas geométricas, pouquíssimas foram as ocasiões em que alunos foram bem-sucedidos nestas questões;

- quando as ferramentas geométricas eram apresentadas, e os alunos incentivados a tentarem utilizá-las, um número maior de alunos conseguiram resolver as questões (total ou parcialmente);

- quando os alunos viam a resolução de uma questão utilizando recursos geométricos, a próxima questão que eles tinham contato possuía uma média de desenvolvimento maior do que antes.

Alguns resultados interessantes serão comentados nas próximas seções deste capítulo.

5.2 Aplicação da Questão 3 em turma regular do 1º ano do Ensino Médio

5.2.1 Situação

A **Questão 3** desta monografia foi apresentada a uma turma do 1º ano do Ensino Médio, composta por 34 alunos. Reproduzimos a **Questão 3** abaixo:

Questão 3 – Formulação própria: Um automóvel, partindo do repouso, percorre um trajeto retilíneo da seguinte forma:

- inicialmente, mantém uma aceleração constante igual a 4 m/s^2 ;
- após 10 s, começa a frear uniformemente com aceleração de 2 m/s^2 ;
- ao atingir velocidade nula, cessa permanentemente seu movimento.

Determinar a máxima velocidade atingida pelo automóvel, o tempo total de movimento e a distância total percorrida.

5.2.2 Antes de explicar algumas ferramentas geométricas

Vários alunos conseguiram chegar a alguns resultados corretos (pelo menos parcialmente), mas alguns se embolaram no fato de o movimento descrito não possuir “uma equação” que resolva todo o problema. Pelo fato de haver dois movimentos diferentes descritos (dois movimentos uniformemente variados, cada qual com seus parâmetros), somente consegue resolver algebricamente esta questão quem se dá conta disso e usa os resultados finais do primeiro movimento como condições iniciais do segundo movimento.

Neste contexto, uma resolução interessante (embora não 100% correta) foi a de uma aluna, que se encontra na Figura 30. Como se pode observar, a aluna dividiu o movimento em dois “trechos”, tendo identificado corretamente que a posição s e a velocidade v do instante 10 segundos (instante final no “trecho 1”) consistem na posição inicial s_0 e na velocidade inicial v_0 do “trecho 2”. Desta maneira, obteve com sucesso a posição final do “trecho 2”, que coincidiu com a distância total percorrida (já que o movimento foi retilíneo e num único sentido, e a posição inicial atribuída como 0). Além disso, obteve com sucesso a velocidade de 40 m/s (fi-

nal do “trecho 1”), que corresponde à velocidade máxima alcançada pelo automóvel. A aluna não explicou esta correspondência na questão, mas quando indagada, disse corretamente que esta seria a velocidade máxima pois foi o último instante antes do começo do freio. O único erro maior da aluna foi ter dado como resposta o tempo de 20 segundos como tempo total de movimento, sendo que este na verdade é o tempo de conclusão do “trecho 2” apenas (que deveria ser somado ao tempo de 10 segundos do “trecho 1” para que se alcançasse a resposta correta de 30 segundos).

automóvel, o tempo total de movimento e a distância total percorrida.

acelera freia

repositos

Trecho 1: $s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$

$$s = 0 + 0 \cdot 10 + \frac{4 \cdot 10^2}{2}$$

$$s = \frac{400}{2} = 200 \text{ m} \quad (\text{é o } s_0 \text{ do trecho 2})$$

$$v = v_0 + at$$

$$v = 0 + 4 \cdot 10$$

$$v = 40 \text{ m/s} \quad (\text{é o } v_0 \text{ do trecho 2})$$

Trecho 2: $s = 200 + 40 \cdot t - 2 \cdot t^2$

freia até parar: $v = v_0 + at$

$$0 = 40 - 2t$$

$$2t = 40$$

$$t = 20 \text{ s}$$

$$s = 200 + 40 \cdot 20 - 2 \cdot 20^2$$

$$s = 200 + 800 - 400$$

$$s = 600 \text{ m}$$

40
x10
400
-200
200

Respostas: 40 m/s, 20 s, 600 m

Figura 30: Resolução da Questão 3 por aluna do 1º ano, sem o uso de ferramentas geométricas.

5.2.3 Após explicar algumas ferramentas geométricas

Foi então revisada em sala de aula as propriedades dos gráficos da cinemática, em especial o conceito de área de gráfico velocidade-tempo. Uma outra questão foi resolvida exclusivamente por meios gráficos, sendo então pedido aos alunos que refizessem a **Questão 3**, mas desta vez todos deveriam primeiro construir um gráfico velocidade-tempo da situação e, a partir dele, tentar desenvolverem a resolução da questão.

Uma solução interessante, desenvolvida por um aluno, encontra-se na Figura 31:

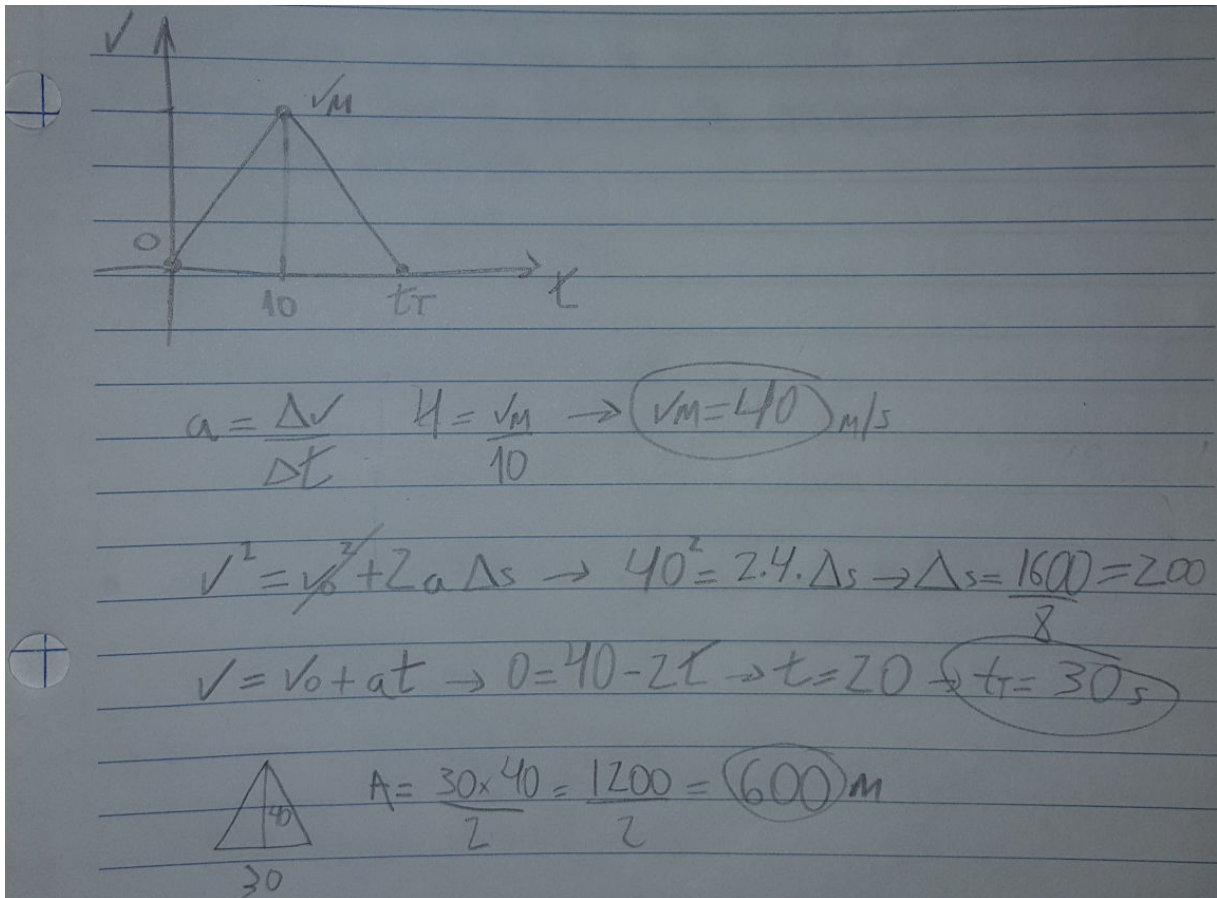


Figura 31: Resolução da Questão 3 por aluno, incentivado a utilizar gráficos

Notamos, nesta resolução, que o aluno construiu corretamente o gráfico velocidade-tempo da situação apresentada. Pelo gráfico, é imediato perceber que a velocidade máxima alcançada é a velocidade final do primeiro movimento acelerado. O aluno encontrou essa velocidade máxima utilizando o conceito de aceleração média (que é nesse caso, pelo menos de forma implícita, o conceito de tangente do gráfico velocidade-tempo, já que o movimento é uniformemente variado, gerando assim segmento de reta inclinado). O aluno então usou a equação de Torricelli para encontrar o deslocamento efetuado até que o móvel alcançasse a velocidade máxima, encontrando o resultado correto de 200 m (muito embora tal resposta não seja necessária, e nem utilizada no prosseguimento da resolução). Por meio de uma equação velocidade x tempo, ele encontrou o tempo do segundo movimento e corretamente adicionou 10 segundos a esse tempo, encontrando o tempo total de 30 segundos. Por fim, encontrou o deslocamento total aplicando a área do triângulo total formado pelo gráfico.

5.2.4 Após a explicação da questão no quadro, tanto da forma algébrica quanto da forma geométrica

A **Questão 3** foi então resolvida no quadro de duas formas: uma algébrica, separando os movimentos em dois, e outra geométrica, da forma exata como foi proposta nesta monografia.

A maioria dos alunos:

- achou a solução geométrica mais “clara” de se compreender (principalmente o fato de a velocidade final do primeiro trecho ser a maior velocidade de todas no movimento completo, visível pelo pico do gráfico);

- achou a solução geométrica mais “enxuta”, isto é, escrevendo-se menos e utilizando-se menos equacionamentos;

- compreendeu o fato de que questões que envolvem diferentes movimentos de um mesmo corpo podem se tornar mais simples de se entender se um gráfico inicial fosse montado.

5.3 Aplicação da Questão 8 em turma preparatória para concursos militares

5.3.1 Situação

A **Questão 8** desta monografia foi apresentada a uma turma cujos alunos se preparam para os vestibulares do ITA e do IME. A turma é composta por 23 alunos, com idades variando de 16 a 21 anos, sendo que tais alunos ou estão cursando a 3ª série do Ensino Médio, ou já concluíram o Ensino Médio.

Alguns alunos desta turma admitiram que já conheciam esta questão, sendo portanto desconsiderados do espaço amostral de estudo, que foi reduzido a 15 pessoas. Reproduzimos a **Questão 8** abaixo:

Questão 8 – SARAEVA *et al* (1985); vestibular ITA: Três turistas, reunidos num mesmo local e dispendo de uma bicicleta que pode levar somente duas pessoas de cada vez, precisam chegar ao centro turístico o mais rápido possível. O turista A leva o turista B de bicicleta até um ponto x do percurso e retorna para apanhar o turista C, que vinha caminhando ao seu encontro. O turista B, a partir de x , continua a pé sua viagem rumo ao centro turístico. Os três chegam simultaneamente ao centro turístico. A velocidade média como pedestre é v_1 , enquanto que como ciclista é v_2 . Com que velocidade média os turistas farão o percurso total? Dar a resposta em função apenas de v_1 e v_2 .

5.3.2 Antes de incentivar o uso de ferramentas geométricas

Dos 15 alunos que tiveram contato pela primeira vez com uma questão do tipo desta **Questão 8**, somente 1 conseguiu êxito total (isto é, resolveu a questão de forma 100% correta). Alguns outros chegaram a algumas conclusões pelo caminho da resolução, e alguns mal iniciaram a questão. O aluno que resolveu corretamente a questão, o fez de forma algébrica pura, levando cerca de 45 minutos para concluí-la. Nas próximas três figuras, reproduzimos integralmente a solução do aluno, inclusive os “rabiscos” feitos por ele nas partes que ele verificou por si próprio que não o levariam a “lugar algum” na questão.

Questão ITA)

Diagram showing a path with points 0, A, B, X, and Z. A person is moving from 0 to Y, and a bike is moving from A to C. Distances are labeled as 'a pé' (on foot) and 'bike'. Time intervals are labeled as Δt_1 , Δt_2 , and Δt_3 .

Equations for velocity:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad v_a &= \frac{x}{\Delta t_1} \\ \textcircled{2} \quad v_a &= \frac{x-y}{\Delta t_2} \\ \textcircled{3} \quad v_a &= \frac{z-y}{\Delta t_3} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{aligned}} \right\} \text{bike}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad v_p &= \frac{y}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \\ \textcircled{5} \quad v_p &= \frac{z-x}{\Delta t_2 + \Delta t_3} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \end{aligned}} \right\} \text{a pé}$$

Velocity of the bike relative to the ground:

$$v_m = \frac{z}{\sum \Delta t} \Rightarrow v_m = \frac{z}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3}$$

Equations for distance:

$$\begin{aligned} \textcircled{5}: v_p (\Delta t_2 + \Delta t_3) &= z - x \Rightarrow x = z - v_p (\Delta t_2 + \Delta t_3) \\ \textcircled{4}: v_p (\Delta t_1 + \Delta t_2) &= y \end{aligned}$$

Substitution:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad v_a &= \frac{z - v_p (\Delta t_2 + \Delta t_3)}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{z - v_p (\Delta t_2 + \Delta t_3)}{v_a} \\ \textcircled{2} \quad v_a &= \frac{z - v_p (\Delta t_2 + \Delta t_3) - v_p (\Delta t_1 + \Delta t_2)}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{z - v_p (\Delta t_2 + \Delta t_3) - v_p (\Delta t_1 + \Delta t_2)}{v_a} \\ \textcircled{3} \quad v_a &= \frac{z - v_p (\Delta t_2 + \Delta t_3)}{\Delta t_3} \Rightarrow \Delta t_3 = \frac{z - v_p (\Delta t_2 + \Delta t_3)}{v_a} \end{aligned}$$

Sum of distances:

$$\sum \Delta t = \frac{z}{v_a} - \frac{v_p}{v_a} (4\Delta t_2 + 4\Delta t_3)$$

Figura 32: Parte 1 da resolução da Questão 8 por aluno, de forma puramente algébrica

De ①, ② e ③:

$$\begin{cases} \Delta t_1 = \frac{x}{v_1} \\ \Delta t_2 = \frac{x-y}{v_2} \\ \Delta t_3 = \frac{z-y}{v_3} \end{cases}$$

Aplicando em ④ e ⑤:

④: $v_1 = \frac{y}{\frac{x}{v_1} + \frac{x-y}{v_2}} = \frac{y \cdot v_1 v_2}{v_2 x - y}$

⑤: $v_1 = \frac{z-x}{\frac{x-y}{v_2} + \frac{z-y}{v_3}} = \frac{(z-x) \cdot v_2 v_3}{x + z - 2y}$

④=⑤: $\frac{y \cdot v_1 v_2}{v_2 x - y} = \frac{(z-x) \cdot v_2 v_3}{x + z - 2y}$

$$y \cdot x + y \cdot z - 2y^2 = \Delta x z - \Delta x^2 - y z + x y$$

$$\Delta x y = \Delta x z + \Delta y^2 - \Delta x^2$$

$$z(y-x) = y^2 - x^2$$

$$z(y-x) = (y+x)(y-x)$$

$z = y+x$

Portanto há simetria:

Logo:

① $v_1 = \frac{D+d}{T+d}$ ③ $v_1 = \frac{D}{T+d}$

② $v_1 = \frac{D}{T}$ ④ $v_1 = \frac{2D+d}{T+T}$

② $v_1 = \frac{D}{T}$
 $v_2 = \frac{D}{T+d}$

Em ①: $v_1 = \frac{v_1(T+d) + D \cdot T}{T+T} \Rightarrow v_1(T+d) + D \cdot T = v_1 T + D \cdot T$

Em ③: $v_1 = \frac{D(T+d) + D \cdot T}{2T} \Rightarrow v_1 = \frac{D(T+d) + D \cdot T}{2T} = \frac{D(2T+d)}{2T}$

Figura 33: Parte 2 da resolução da Questão 8 por aluno, de forma puramente algébrica

$$\text{Bikes: } \begin{cases} v_a = \frac{D+d}{t_1} & \textcircled{1} \\ v_a = \frac{d}{t_a} & \textcircled{2} \end{cases} \quad \text{A pé: } v_1 = \frac{D}{t_1+t_a} & \textcircled{3} \quad v_m = \frac{2D+d}{2t_1+t_a} & \textcircled{4}$$

Isolando d em $\textcircled{2}$ e aplicando ao sistema $\textcircled{1}, \textcircled{3}, \textcircled{4}$:

$$d = v_a t_a \Rightarrow \begin{cases} v_a t_1 = D + v_a t_a & \textcircled{1} \\ D = v_1 (t_1 + t_a) & \textcircled{3} \\ v_m = \frac{2D + v_a t_a}{2t_1 + t_a} & \textcircled{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_a t_1 = v_1 (t_1 + t_a) + v_a t_a \Rightarrow t_a = \frac{v_a t_1 - v_1 t_1}{v_1 + v_a} = \frac{t_1 (v_a - v_1)}{v_1 + v_a} \\ v_m = \frac{2v_1 (t_1 + t_a) + v_a t_a}{2t_1 + t_a} \end{cases}$$

$$v_m = \frac{2v_1 \left(t_1 + \frac{t_1 (v_a - v_1)}{v_1 + v_a} \right) + v_a t_1 \frac{(v_a - v_1)}{v_1 + v_a}}{2t_1 + \frac{t_1 (v_a - v_1)}{v_1 + v_a}}$$

$$v_m = \frac{2v_1 \left(\frac{t_1 (v_1 + v_a) + t_1 (v_a - v_1)}{v_1 + v_a} \right) + v_a t_1 \frac{(v_a - v_1)}{v_1 + v_a}}{2t_1 \frac{(v_1 + v_a)}{v_1 + v_a} + \frac{t_1 (v_a - v_1)}{v_1 + v_a}}$$

$$v_m = \frac{2v_1 (2t_1 v_a) + v_a^2 t_1 - v_1 v_a t_1}{t_1 v_1 + 3t_1 v_a} = \frac{t_1 (v_a^2 + 3v_1 v_a)}{t_1 (v_1 + 3v_a)}$$

$$v_m = \frac{v_a (v_a + 3v_1)}{v_1 + 3v_a}$$

Figura 34: Parte 3 da resolução da Questão 8 por aluno, de forma puramente algébrica

Como podemos ver, a solução ficou grande e extremamente “tediosa”, pois a partir dos equacionamentos iniciais, virou um problema de matemática quase pura, “braçal”. Mas destacamos o empenho e o sucesso do aluno, que demonstrou ser capaz de resolver uma questão bem difícil, não importando os meios utilizados.

Vemos, pela Figura 32, que o aluno começa entendendo o problema por meio de um desenho simples, onde ele fez o caminho entre os pontos inicial e final do movimento, e indicou nessa mesma figura os percursos feitos de bicicleta e a pé. Tal desenho permitiu que ele percebesse o quanto desloca (e por quanto tempo desloca) cada um dos três turistas, tendo com isso atribuído incógnitas de espaço e de tempo ao desenho, para posterior equacionamento.

Em seguida, o aluno escreveu a equação da velocidade média do movimento total (que é a pergunta do problema) utilizando as incógnitas que ele criou. Indagado sobre isso, ele disse que é uma estratégia que ele usa: em toda questão que envolva várias equações, ele olha o que está sendo pedido pelo problema com as incógnitas que ele criou, para saber como irá manipular seu sistema de equações até chegar no que está sendo pedido utilizando-se apenas as informações dadas no enunciado (que no caso, são as velocidades v_1 e v_2).

Nesta figura ainda, o aluno começou a manipular as equações mas viu que não estava adiantando muita coisa, por isso rabiscou essa parte desnecessária e prosseguiu com sua resolução na folha mostrada na Figura 33, onde isolou as incógnitas “tempo” criadas por ele em 3 das equações que ele montou, e aplicou os resultados nas outras equações que tinha, numa tentativa de reduzir o sistema de 5 equações para apenas 2. Ao fazer isto, ele constatou por meio das incógnitas que ele mesmo criou que havia simetria no problema, ou seja, os turistas que andaram a pé, o fizeram na mesma quantidade de metros. Além disso, por possuírem mesma velocidade, logo teriam andado a pé pelo mesmo intervalo de tempo.

Constatadas as simetrias de tempo e espaço no problema, ele então refez o seu esquema, podendo assim, por essas simetrias, reduzir bem o número de incógnitas utilizadas na resolução do problema, tornando assim a matemática por trás do problema muito mais simples.

Ele começou nesta mesma figura a tentar equacionar com as novas equações oriundas da simetria, mas constatou que não estava indo bem pelo caminho tomado e rabiscou essa parte, tendo prosseguido então para a página mostrada na Figura 34.

Nessa figura, ele reduziu o número de equações criadas ao isolar a incógnita “d” em uma das equações e aplicando às outras. Depois, reduziu novamente o grau do sistema isolando a incógnita “D” numa equação e aplicando nas outras restantes, sobrando com isso duas equações apenas no sistema. Em uma delas, ele isolou a incógnita “ t_2 ” e aplicou à equação restante, que era a da velocidade média global do problema. Manipulando algebricamente esta equação, ele finalmente chegou à resposta correta da velocidade média global em função de v_1 e v_2 .

5.3.3 Após incentivar o uso de ferramentas geométricas

A **Questão 8** foi então resolvida no quadro pela forma geométrica proposta nesta monografia. Todos os alunos, de forma unânime, gostaram da resolução geométrica desta questão. Muitos se impressionaram, sobremaneira, com a “elegância” e “limpeza” proporcionadas pela resolução geométrica, que elimina o uso de algebrismo puro e dá um caráter mais onisciente do que está acontecendo na situação proposta pela questão.

O aluno que resolveu algebricamente a **Questão 8**, como mostrado nas últimas 3 figuras, disse, com suas palavras, que “sentiu na pele” a diferença entre resolver esse tipo de questão mais complexa algebricamente e resolver geometricamente, admitindo que a partir de então iria sempre tentar pelo menos esboçar os gráficos de questões de movimento aparentemente complexas, para ver se encontraria um jeito mais simples ou rápido de resolvê-las.

Os alunos dessa mesma turma foram então convidados a resolver, por conta própria agora, uma outra questão – a **Questão 7** desta monografia –, mas de duas formas: primeiro, tentando resolver algebricamente; depois, tentando resolver geometricamente. Os resultados desta próxima experiência encontram-se na seção a seguir.

5.4 Aplicação da Questão 7 em turma preparatória para concursos militares

5.4.1 Situação e análise

A **Questão 7** desta monografia foi apresentada em sequência à resolução geométrica da **Questão 8** apresentada aos alunos na seção anterior. O objetivo disto seria verificar como se comportariam as soluções das questões apresentadas agora, uma vez que os alunos foram incentivados a resolver questões sobre movimentos mais complexos utilizando gráficos.

Como foi expresso no final da seção anterior, foi pedido aos alunos que tentassem resolver a questão de duas formas: primeiro só algebricamente, sem gráficos; e depois, utilizando gráficos. Nenhum aluno resolveu até a resposta final algebricamente, mas agora vários chegaram à resposta correta com uso do meio gráfico. Reproduzimos a **Questão 7** abaixo:

Questão 7 – SARAEVA *et al* (1985): Um engenheiro trabalha numa fábrica, que fica nos arredores da cidade. Diariamente ao chegar à última estação ferroviária, um carro que vem da fábrica transporta-o para o local de trabalho (o carro chega à estação sempre no mesmo instante que o engenheiro). Certa vez, o engenheiro chegou à estação uma hora antes do habitual e, sem esperar o carro, foi a pé até o local de trabalho. No caminho encontrou-se com o carro, chegando assim à fábrica 10 min antes do habitual. Quanto tempo caminhou o engenheiro antes de encontrar-se com o carro? Considerar que os módulos das velocidades do carro e do engenheiro são sempre constantes, e que o módulo da velocidade do carro na ida é igual ao da volta à fábrica.

Vamos analisar nas próximas duas figuras o resultado interessantíssimo de um aluno que “nem mexeu” direito na questão ao tentar resolvê-la algebricamente, mas resolveu-a brilhantemente utilizando gráficos.

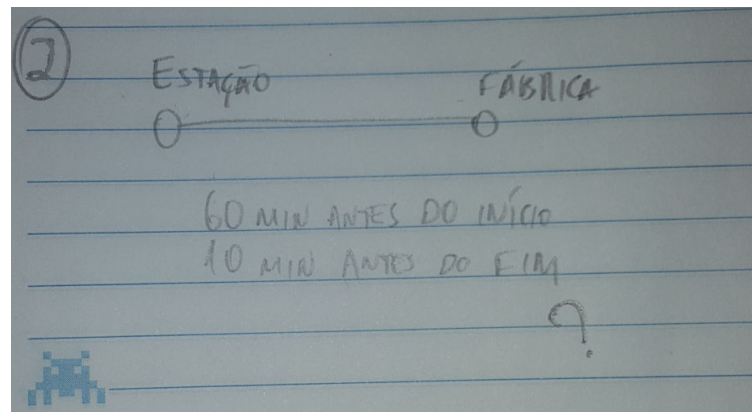


Figura 35: Tentativa de se resolver a Questão 7 algebricamente

Como podemos ver na Figura 35, este aluno não conseguiu nem dar início à resolução da **Questão 7** por meios algébricos puros. Porém, ao tentar resolver de forma geométrica, encontrou a solução de forma simples, usando apenas conceitos de retas paralelas, conforme vemos na Figura 36:

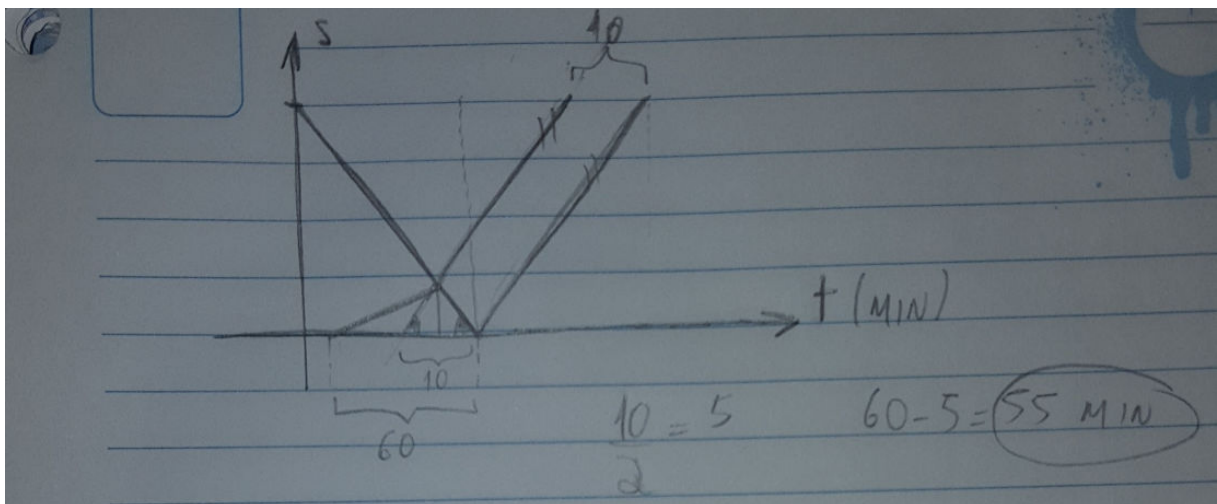


Figura 36: Resolução da Questão 7 de forma geométrica, por aluno que nem chegou a iniciar a resolução algébrica

5.5 Comentários gerais sobre as inserções durante o Estágio

A ideia geral desta monografia surgiu durante as atividades do Estágio I, tendo sido combinado com o professor supervisor que durante as inserções em sala de aula da disciplina

de Estágio II, as ferramentas geométricas poderiam ser trabalhadas e experimentadas em sala de aula.

Devido principalmente às limitações do tempo de Estágio, não foram todas as questões propostas nesta monografia que foram inseridas no contexto de sala de aula durante a vigência do Estágio, e nem todas as ferramentas geométricas foram abordadas. No geral, foram trabalhadas principalmente as ferramentas geométricas aplicadas a gráficos, sobremaneira a gráficos em questões de cinemática, que é talvez o ponto de partida para o entendimento da eficácia das soluções geométricas em Física.

Não obstante, as conclusões tiradas durante essas experimentações coincidiram exatamente com as que o autor desta monografia já possuía com a experiência de vários anos de sala de aula utilizando tais ferramentas: quando em contato com uma ferramenta geométrica, os alunos em geral tendem a preferir soluções algébricas somente em questões mais simples (por exemplo, situações em cinemática que apenas um ou duas equações já são capazes de resolver o problema). Em situações mais complexas, em que há vários tipos de movimentos interligados, os alunos tendem a aceitar a solução geométrica como a mais simples, e a compreender bem melhor a situação do problema quando um gráfico é esboçado.

Certamente, as atividades de Estágio foram enriquecedoras, por haver sido possível a experimentação de fato dos métodos propostos em turmas que até então não haviam tido contato com o autor desta monografia, tornando o espaço amostral mais generalizado e imparcializado no que tange o uso das ferramentas propostas. Além disso, a presença do professor supervisor foi extremamente interessante para que várias conclusões fossem tiradas em conjunto.

6 Considerações finais

Neste trabalho, foi proposta a avaliação de alguns recursos geométricos que podem facilitar o entendimento e/ou a resolução de um problema de Física a nível de Ensino Médio que seja desafiador para esses alunos. Tais problemas costumam figurar em olimpíadas intelectuais (como OBF, OIBF, IPhO, ...) e em alguns vestibulares brasileiros que exigem um conhecimento de exatas aprofundado (notadamente as escolas militares, como ITA, IME, etc...).

Tendo experiência em ensino de física para alunos que concorreriam a esses vestibulares mais exigentes em física ou que fariam provas de olimpíadas, como professor eu notei que vários problemas considerados difíceis puderam ser melhor compreendidos utilizando recursos geométricos, principalmente utilizando gráficos. Os gráficos permitem uma visão ampla e concisa do problema como um todo, já que várias informações podem ser facilmente visualizadas de uma vez só ao se analisar um gráfico.

A maior parte das ferramentas geométricas necessárias são aquelas aprendidas no Ensino Fundamental, como triângulos retângulos e áreas. O uso de um triângulo ou o cálculo de uma área pode significar uma simplificação enorme no algebrismo de uma questão de Física, uma vez que tais procedimentos podem significar a não necessidade de se resolver várias equações.

Obviamente, os recursos geométricos são mais fartos em questões que por natureza já envolvem alguma forma de geometria, como Cinemática, Dinâmica ou qualquer outra parte da Física que envolva grandezas vetoriais, além, é claro, de Óptica Geométrica. Mas as ferramentas geométricas, a princípio, podem ser aplicadas em qualquer questão de qualquer parte da física, caso haja alguma forma de se traduzir graficamente a resolução da questão. Neste trabalho, por exemplo, uma questão de calorimetria (que a princípio não possuía nenhuma característica geométrica) foi resolvida graficamente. Questões de outras áreas que aparentemente não possuem quaisquer relações geométricas podem, com um pouco de ousadia e criatividade, também serem resolvidas geometricamente.

Algumas das ferramentas e das questões propostas nesta monografia puderam ser aplicadas a alunos variados durante a vigência do Estágio Supervisionado do autor desta monografia. Alguns resultados interessantes foram mostrados neste trabalho, e as conclusões gerais obtidas nessas experiências apontam que o aluno em geral assimila com mais propriedade as soluções geométricas, em detrimento das puramente algébricas, quando ele tem contato com questões desafiadoras de física. Constatou-se, por exemplo, que o aluno se sente entendendo

melhor os problemas relativos a movimentos complexos quando analisa um gráfico, tendo informação visual clara do que ocorre com as grandezas que variam durante o movimento.

Obviamente, as soluções geométricas dependem da base geométrica do aluno, mas o mesmo argumento pode ser dito sobre a base algébrica quando se ensinam soluções algébricas. Na opinião pessoal do autor, contudo, as bases geométricas geralmente são melhor assimiladas do que as algébricas, pois o ser humano tem contato direto com geometria e formas geométricas por toda sua vida, de forma que o raciocínio geométrico geralmente é mais intuitivo do que o algébrico. Adiciona-se a esse fato que muitas pessoas conseguem desenvolver habilidades relacionadas ao raciocínio geométrico-espacial mesmo sem estudo específico, enquanto consistem em casos extremamente raros as pessoas que desenvolvem habilidades algébricas sem contato acadêmico específico.

Conclui-se, portanto, que os recursos geométricos podem configurar numa forma simples e elegante de se resolver questões da Física do Ensino Médio, em especial as questões mais desafiadoras.

Referências bibliográficas

- BRITO, R. Fundamentos de Mecânica. 2ª Edição. VestSeller. 2011
- IEZZI, G. Fundamentos de Matemática Elementar Vol 03. 2ª edição. 1978
- MORGADO, A.C.; WAGNER, E.; JORGE, M. Geometria II. Edição original. FC&Z Livros, 2002
- RAMALHO, NICOLAU, TOLEDO. Os Fundamentos da Física Vol. 1. Ed. Moderna, 2007
- SARAEVA, I. M.; BUKHOVTSEV, B. B.; KRIVTCHENKOV, V. D.; MIAKISHEV, G. YA. Problemas selecionados de Física Elementar. 2ª Edição. Mir Moscou. 1985
- ZEITZ, P. The Art and Craft of Problem Solving. 2nd Ed. John Wiley & Sons. 2007
- NETO, A. A.; LAPA, N.; SAMPAIO, J. L. P.; CAVALLANTTE, S. L. Noções de Matemática Volume 6: Geometria Analítica. Editora Moderna. 1980
- ROCHA, José Antonio Meira da. Modelo de monografia e Trabalho de Conclusão de Curso(TCC). Documento digital do programa Openoffice.org versão 2, disponível em: http://meiradarocha.jor.br/news/tcc/files/2009/06/modelo_tcc-2011-11-23a.ott. Acesso em: 02 de abril de 2014.

Siglas de vestibulares e olimpíadas mencionados:

- AFA: Academia da Força Aérea
ITA: Instituto Tecnológico de Aeronáutica
IME: Instituto Militar de Engenharia
OBF: Olimpíada Brasileira de Física
OIbF: Olimpíada Ibero-Americana de Física
IPhO: International Physics Olympiad